

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Основные понятия	9
1.1. Введение в итерационные методы	9
1.1.1. Базовые итерационные методы и определения (10).	
1.1.2. Параметры релаксации (19). 1.1.3. Методы, основанные на подпространствах Крылова (24).	
1.2. Пример уравнения диффузии и метод конечных элементов	28
1.2.1. Уравнение диффузии, слабое решение (29).	
1.2.2. Метод конечных элементов (31).	
1.3. Двухсеточный метод	39
1.3.1. Сглаживающее свойство базовых итерационных методов (39). 1.3.2. Коррекция с грубой сетки (41).	
1.3.3. Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке (42). 1.3.4. Матрица итераций (44). 1.3.5. Сходимость для модельной задачи (45).	
Глава 2. Классический многосеточный метод	48
2.1. Многосеточный метод	48
2.1.1. V-, W- и F-циклы (50). 2.1.2. Предсглаживание и постсглаживание. Матрица итераций (52).	
2.2. Сходимость многосеточного метода	54
2.2.1. Сходимость W-цикла (55). 2.2.2. Свойства сглаживания и аппроксимации (56). 2.2.3. Случай самосопряженной задачи (58).	
2.3. Анализ многосеточного метода на примере задачи Пуассона	63
2.3.1. Свойство аппроксимации (66). 2.3.2. Свойство сглаживания (68). 2.3.3. Численные примеры (71).	
2.4. Более сложные случаи	74
2.4.1. Случай неполной регулярности дифференциальной задачи (74). 2.4.2. Случай невложенных подпространств. Неконформные конечные элементы (79).	
Глава 3. Аддитивный многосеточный метод	87
3.1. Переобусловливание	87
3.1.1. Многосеточный метод как переобусловливатель (88).	
3.2. Аддитивный многосеточный метод	90
3.3. Метод коррекции на подпространствах	91

3.3.1. Метод параллельной коррекции на подпространствах (91).	
3.3.2. Метод последовательной коррекции на подпространствах (95).	
3.3.3. Сходимость метода параллельной коррекции на подпространствах (96).	
3.3.4. Усиленное неравенство Шварца (98).	
3.4. Сходимость аддитивного метода для задачи Пуассона.	99
3.4.1. Оценка для K_1 (99).	
3.4.2. Оценка для K_0 (101).	
3.4.3. Численные примеры (103).	
3.5. Неоднородное измельчение и метод иерархических базисов	105
3.5.1. Сходимость метода иерархических базисов для задачи Пуассона (107).	
Глава 4. Применение многосеточного метода.	112
4.1. Сингулярно-возмущенные задачи.	112
4.1.1. Условия на сглаживания для построения универсальных многосеточных методов (114).	
4.1.2. Сходимость многосеточного метода для уравнения реакции-диффузии (116).	
4.1.3. ILU-разложение, ILU-сглаживания (119).	
4.1.4. Многосеточный метод для анизотропного уравнения диффузии (124).	
4.1.5. Уравнения конвекции-диффузии: схемы 1-го порядка против потока и сглаживания (130).	
4.1.6. Метод SUPG для уравнений с доминирующей конвекцией (136).	
4.2. Уравнения Навье–Стокса.	142
4.2.1. Задача Стокса (142).	
4.2.2. Матрица системы уравнений Стокса, дополнение по Шуру (147).	
4.2.3. Свойство аппроксимации (150).	
4.2.4. Сглаживания Ванки для системы Стокса (153).	
4.2.5. Распределенные итерации как сглаживания (155).	
4.2.6. Сглаживания Бресса–Зарацона (158).	
4.2.7. Многосеточный метод как вложенные итерации (161).	
Список литературы.	165

ВВЕДЕНИЕ

О чем эта книга? Коротко на этот вопрос можно ответить так: о том, как численно решать уравнения в частных производных максимально точно и быстро. Расшифруем, что имеется в виду, и сделаем необходимые оговорки. Во-первых, говоря о численном решении, мы подразумеваем получение приближенного решения задачи с помощью вычислений на компьютере. Отказ от нахождения точного решения в пользу приближенного становится неизбежен там, где нахождение аналитического решения невозможно в силу сложности дифференциальной задачи. Во-вторых, под максимальной точностью здесь понимается получение максимально качественного приближения к решению дифференциальной задачи при заранее заданных, ограниченных компьютерных ресурсах. Два важных метода понадобятся для достижения этой цели: 1) метод конечных элементов поможет приблизить и заменить в расчетах дифференциальную задачу дискретной, 2) собственно многосеточный метод позволит быстро получить решение дискретной задачи. Если дискретная задача состоит в нахождении N неизвестных значений, то многосеточный метод в большинстве случаев — единственный метод, который хорошо ¹⁾ справится с данной задачей за $O(N)$ арифметических действий. Наконец, безусловно не любое уравнение в частных производных можно на сегодняшний день эффективно численно решить, комбинируя метод конечных элементов и многосеточный метод. Однако очень многие уравнения, имеющие физический подтекст, можно. В лекциях отдельно идет речь о применении многосеточного метода к решению ряда задач, возникающих на практике. Их выбор в определенной мере отражает область интересов автора и не должен свидетельствовать об ограниченности данного подхода в других областях (интересующийся читатель сможет найти ссылки на подходящую литературу). Тем не менее общие принципы многосеточного метода и многие из трудностей, обозначенных и частично преодолеваемых

¹⁾ Это утверждение расшифровано в разделе 2.1 на стр. 50.