

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора к первому изданию	7
Предисловие редактора ко второму изданию	10

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ ОСНОВЫ ТЕОРИИ

ГЛАВА I. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Матрицы. Основные обозначения	11
§ 2. Сложение и умножение прямоугольных матриц	13
§ 3. Квадратные матрицы	22
§ 4. Ассоциированные матрицы. Миноры обратной матрицы	27
§ 5. Обращение прямоугольных матриц. Псевдообратная матрица	30

ГЛАВА II. АЛГОРИТМ ГАУССА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Метод исключения Гаусса	39
§ 2. Механическая интерпретация алгоритма Гаусса	43
§ 3. Детерминантное тождество Сильвестра	45
§ 4. Разложение квадратной матрицы на треугольные множители	47
§ 5. Разбиение матрицы на блоки. Техника оперирования с блочными матрицами. Обобщенный алгоритм Гаусса	53

ГЛАВА III. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В n -МЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Векторное пространство	63
§ 2. Линейный оператор, отображающий n -мерное пространство в m -мерное	67
§ 3. Сложение и умножение линейных операторов	69
§ 4. Преобразование координат	71
§ 5. Эквивалентные матрицы. Ранг оператора. Неравенства Сильвестра	72
§ 6. Линейные операторы, отображающие n -мерное пространство само в себя	76
§ 7. Характеристические числа и собственные векторы линейного оператора	79
§ 8. Линейные операторы простой структуры	81

ГЛАВА IV. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ И МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕНЫ МАТРИЦЫ

§ 1. Сложение и умножение матричных многочленов	84
§ 2. Правое и левое деления матричных многочленов. Обобщенная теорема Безу	86
§ 3. Характеристический многочлен матрицы. Присоединенная матрица	89
§ 4. Метод Д.К. Фаддеева одновременного вычисления коэффициентов характеристического многочлена и присоединенной матрицы	93
§ 5. Минимальный многочлен матрицы	95

ГЛАВА V. ФУНКЦИИ МАТРИЦЫ

§ 1. Определение функции матрицы	99
§ 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра	103
§ 3. Другие формы определения $f(A)$. Компоненты матрицы A	106
§ 4. Представление функций матриц рядами	111
§ 5. Некоторые свойства функций от матриц	114

- § 6. Применение функций от матрицы к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 119
- § 7. Устойчивость движения в случае линейной системы 125

ГЛАВА VI. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

- § 1. Элементарные преобразования многочленной матрицы 130
- § 2. Канонический вид λ -матрицы 133
- § 3. Инвариантные многочлены и элементарные делители многочленной матрицы 137
- § 4. Эквивалентность линейных двучленов 142
- § 5. Критерий подобия матриц 144
- § 6. Нормальные формы матрицы 145
- § 7. Элементарные делители матрицы $f(A)$ 149
- § 8. Общий метод построения преобразующей матрицы 152
- § 9. Второй метод построения преобразующей матрицы 156

ГЛАВА VII. СТРУКТУРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ)

- § 1. Минимальный многочлен вектора, пространства (относительно заданного линейного оператора) 165
- § 2. Расщепление на инвариантные подпространства с взаимно простыми минимальными многочленами 167
- § 3. Сравнения. Надпространство 169
- § 4. Расщепление пространства на циклические инвариантные подпространства 171
- § 5. Нормальная форма матрицы 175
- § 6. Инвариантные многочлены. Элементарные делители 178
- § 7. Нормальная жорданова форма матрицы 181
- § 8. Метод А.Н. Крылова преобразования векторного уравнения 183

ГЛАВА VIII. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- § 1. Уравнение $AX = XB$ 193
- § 2. Частный случай: $A = B$. Перестановочные матрицы 197
- § 3. Уравнение $AX - XB = C$ 200
- § 4. Скалярное уравнение $f(X) = 0$ 201
- § 5. Матричное многочленное уравнение 202
- § 6. Извлечение корня m -й степени из невырожденной матрицы 205
- § 7. Извлечение корня m -й степени из вырожденной матрицы 208
- § 8. Логарифм матрицы 212

ГЛАВА IX. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

- § 1. Общие соображения 215
- § 2. Метризация пространства 215
- § 3. Критерий Грама линейной зависимости векторов 218
- § 4. Ортогональное проектирование 220
- § 5. Геометрический смысл определителя Грама и некоторые неравенства 222
- § 6. Ортогонализация ряда векторов 225
- § 7. Ортонормированный базис 230
- § 8. Сопряженный оператор 232
- § 9. Нормальные операторы в унитарном пространстве 235
- § 10. Спектр нормальных, эрмитовых, унитарных операторов 237
- § 11. Неотрицательные и положительно определенные эрмитовы операторы 240
- § 12. Полярное разложение линейного оператора в унитарном пространстве. Формулы Кэли 242
- § 13. Линейные операторы в евклидовом пространстве 246
- § 14. Полярное разложение оператора и формулы Кэли в евклидовом пространстве 252

§ 15. Коммутирующие нормальные операторы	255
§ 16. Псевдообратный оператор	257

ГЛАВА X. КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

§ 1. Преобразование переменных в квадратичной форме	259
§ 2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Закон инерции	261
§ 3. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Формула Якоби	263
§ 4. Положительные квадратичные формы	268
§ 5. Приведение квадратичной формы к главным осям	271
§ 6. Пучок квадратичных форм	272
§ 7. Экстремальные свойства характеристических чисел регулярного пучка форм	277
§ 8. Малые колебания системы с n степенями свободы	284
§ 9. Эрмитовы формы	288
§ 10. Ганкелевы формы	293

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА XI. КОМПЛЕКСНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ, КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

§ 1. Некоторые формулы для комплексных ортогональных и унитарных матриц	301
§ 2. Полярное разложение комплексной матрицы	305
§ 3. Нормальная форма комплексной симметрической матрицы	307
§ 4. Нормальная форма комплексной кососимметрической матрицы	309
§ 5. Нормальная форма комплексной ортогональной матрицы	314

ГЛАВА XII. СИНГУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ МАТРИЦ

§ 1. Введение	318
§ 2. Регулярный пучок матриц	319
§ 3. Сингулярные пучки. Теорема о приведении	321
§ 4. Каноническая форма сингулярного пучка матриц	326
§ 5. Минимальные индексы пучка. Критерий строгой эквивалентности пучков	328
§ 6. Сингулярные пучки квадратичных форм	330
§ 7. Приложения к дифференциальным уравнениям	334

ГЛАВА XIII. МАТРИЦЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

§ 1. Общие свойства	337
§ 2. Спектральные свойства неразложимых неотрицательных матриц	339
§ 3. Разложимые матрицы	349
§ 4. Нормальная форма разложимой матрицы	356
§ 5. Примитивные и импримитивные матрицы	360
§ 6. Стохастические матрицы	364
§ 7. Предельные вероятности для однородной цепи Маркова с конечным числом состояний	368
§ 8. Вполне неотрицательные матрицы	376
§ 9. Осцилляционные матрицы	380

ГЛАВА XIV. РАЗЛИЧНЫЕ КРИТЕРИИ РЕГУЛЯРНОСТИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

§ 1. Критерий регулярности Адамара и его обобщения	387
§ 2. Норма матрицы	390
§ 3. Распространение критерия Адамара на блочные матрицы	392
§ 4. Критерий регулярности Фидлера	394
§ 5. Круги Гершгорина и другие области локализации	395

**ГЛАВА XV. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МАТРИЦ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

§ 1. Системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Общие понятия	399
§ 2. Преобразование Ляпунова	402
§ 3. Приводимые системы	403
§ 4. Каноническая форма приводимой системы. Теорема Еругина	405
§ 5. Матрицант	408
§ 6. Мультипликативный интеграл. Инфинитезимальное исчисление Вольтерра	412
§ 7. Дифференциальные системы в комплексной области. Общие свойства	416
§ 8. Мультипликативный интеграл в комплексной области	418
§ 9. Изолированная особая точка	422
§ 10. Регулярная особая точка	427
§ 11. Приводимые аналитические системы	439
§ 12. Аналитические функции многих матриц и их применение к исследованию дифференциальных систем. Работы И. А. Лаппо-Данилевского	442

ГЛАВА XVI. ПРОБЛЕМА РАУСА–ГУРВИЦА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Введение	445
§ 2. Индексы Коши	446
§ 3. Алгоритм Рауса	449
§ 4. Особые случаи. Примеры	452
§ 5. Теорема Ляпунова	455
§ 6. Теорема Рауса–Гурвица	459
§ 7. Формула Орландо	464
§ 8. Особые случаи в теореме Рауса–Гурвица	466
§ 9. Метод квадратичных форм. Определение числа различных вещественных корней многочлена	469
§ 10. Бесконечные ганкелевы матрицы конечного ранга	471
§ 11. Определение индекса произвольной рациональной дроби через коэффициенты числителя и знаменателя	473
§ 12. Второе доказательство теоремы Рауса–Гурвица	480
§ 13. Некоторые дополнения к теореме Рауса–Гурвица. Критерий устойчивости Лье-нара и Шипара	483
§ 14. Некоторые свойства многочлена Гурвица. Теорема Стильтеса. Представление многочленов Гурвица при помощи непрерывных дробей	487
§ 15. Область устойчивости. Параметры Маркова	493
§ 16. Связь с проблемой моментов	496
§ 17. Связь между определителями Гурвица и определителями Маркова	499
§ 18. Теоремы Маркова и Чебышева	501
§ 19. Обобщенная задача Рауса–Гурвица	507

**ДОБАВЛЕНИЕ. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ
ЧИСЕЛ (В. Б. Лидский)**

§ 1. Мажорирующие последовательности	509
§ 2. Неравенства Неймана–Хорна	512
§ 3. Неравенства Вейля	516
§ 4. Максимально-минимальные свойства сумм и произведений собственных чисел эрмитовых операторов	518
§ 5. Неравенства для собственных и сингулярных чисел сумм и произведений операторов	524
§ 6. Другая постановка задачи о спектре суммы и произведения эрмитовых операторов	527
Примечания	533
Список литературы	539
Предметный указатель	555