ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

Введение в дифференциальную геометрию

1.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

1.1.1. Мотивировка

Рассмотрим евклидово пространство размерности n, которое мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{R}^n$. Будем считать, что в нем заданы декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$ относительно выбранного и фиксированного ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Напомним, что с декартовыми координатами тесно связано понятие евклидова скалярного произведения — билинейной формы, сопоставляющей каждой паре векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ вещественное число $\langle \xi, \eta \rangle$, причем эта операция является симметричной, линейной по каждому аргументу, а сама форма — положительно определенной. В декартовых координатах

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^n\eta^n, \quad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n), \quad \eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n).$$

Однако декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач. Конечно, когда мы имеем дело с довольно простыми кривыми, например с окружностью или эллипсом, то их аналитическое выражение в декартовых координатах является весьма простым. Но весьма часто, например в физических задачах, встречаются, скажем, траектории движения материальных точек в поле каких-либо сил, явное выражение которых в декартовых координатах затруднительно. Например, следующее уравнение определяет в декартовых координатах спираль: $\sqrt{x^2 + y^2} - e^{\lambda(\operatorname{arctg}(y/x))} = 0$ (рис. 1.1). Конечно, эта запись не слишком сложна, но тем не менее эта кривая запишется значительно проще в другой, так называемой *полярной системе координат* (r, φ), связанных с декартовыми

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$