

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Введение в дифференциальную геометрию	7
1.1. Криволинейные системы координат. Простейшие приме- ры	7
1.1.1. Мотивировка	7
1.1.2. Декартовы и криволинейные координаты	9
1.1.3. Простейшие примеры криволинейных систем коорди- нат	14
1.2. Длина кривой в криволинейных координатах	17
1.2.1. Длина кривой в евклидовых координатах	17
1.2.2. Длина кривой в криволинейных координатах	19
1.2.3. Понятие римановой метрики в области евклидова про- странства	23
1.2.4. Индефинитные метрики	25
1.3. Геометрия на сфере, плоскости	28
1.4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского	34
Глава 2. Общая топология	48
2.1. Определения и простейшие свойства метрических и топо- логических пространств	48
2.1.1. Метрические пространства	48
2.1.2. Топологические пространства	50
2.1.3. Непрерывные отображения	52
2.1.4. Фактортопология	54
2.2. Связность. Аксиомы отделимости	56
2.2.1. Связность	56
2.2.2. Аксиомы отделимости	58
2.3. Компактные пространства	60
2.3.1. Компактные пространства	60
2.3.2. Свойства компактных пространств	61
2.3.3. Метрические компактные пространства	62
2.3.4. Операции над компактными пространствами	62
2.4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы	63
2.4.1. Функциональная отделимость	64
2.4.2. Разбиение единицы	66

Глава 3. Гладкие многообразия (общая теория)	68
3.1. Понятие многообразия	70
3.1.1. Основные определения	70
3.1.2. Функции замены координат. Определение гладкого многообразия	73
3.1.3. Гладкие отображения. Диффеоморфизм	77
3.2. Задание многообразий уравнениями	80
3.3. Касательные векторы. Касательное пространство	85
3.3.1. Простейшие примеры	85
3.3.2. Общее определение касательного вектора	88
3.3.3. Касательное пространство $TP_0(M)$	89
3.3.4. Производная функции по направлению	90
3.3.5. Касательное расслоение	93
3.4. Подмногообразия	95
3.4.1. Дифференциал гладкого отображения	95
3.4.2. Локальные свойства отображений и дифференциал	98
3.4.3. Вложение многообразий в евклидово пространство	100
3.4.4. Риманова метрика на многообразии	102
3.4.5. Теорема Сарда	104
Глава 4. Гладкие многообразия (примеры)	109
4.1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве	109
4.1.1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе	109
4.1.2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе	114
4.2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы	119
4.2.1. Первая квадратичная форма	119
4.2.2. Вторая квадратичная форма	122
4.2.3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности	126
4.2.4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей	131
4.3. Группы преобразований	140
4.3.1. Простейшие примеры групп преобразований	140
4.3.2. Матричные группы преобразований	151
4.3.3. Полная линейная группа	152
4.3.4. Специальная линейная группа	152

4.3.5. Ортогональная группа	153
4.3.6. Унитарная группа и специальная унитарная группа	154
4.3.7. Симплектическая некомпактная и симплектическая компактная группы	157
4.4. Динамические системы	161
4.5. Классификация двумерных поверхностей	171
4.5.1. Многообразия с краем	171
4.5.2. Ориентируемые многообразия	173
4.5.3. Классификация двумерных многообразий	175
4.6. Двумерные многообразия как римановы поверхности алгебраических функций	186
Глава 5. Тензорный анализ и риманова геометрия	197
5.1. Общее понятие тензорного поля на многообразии	197
5.2. Простейшие примеры тензорных полей	202
5.2.1. Примеры	202
5.2.2. Алгебраические операции над тензорами	205
5.2.3. Кососимметричные тензоры	208
5.3. Связность и ковариантное дифференцирование	215
5.3.1. Определение и свойства аффинной связности	215
5.3.2. Римановы связности	222
5.4. Параллельный перенос. Геодезические	224
5.4.1. Предварительные замечания	224
5.4.2. Уравнение параллельного переноса	226
5.4.3. Геодезические	228
5.5. Тензор кривизны	237
5.5.1. Предварительные замечания	237
5.5.2. Координатное определение тензора кривизны	238
5.5.3. Инвариантное определение тензора кривизны	239
5.5.4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана	240
5.5.5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана	243
Глава 6. Теория гомологий	246
6.1. Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии	247
6.1.1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм	247

6.1.2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама)	252
6.1.3. Гомотопические свойства групп когомологий	255
6.2. Интегрирование внешних форм	260
6.2.1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию	260
6.2.2. Формула Стокса	261
6.3. Степень отображения и ее приложения	266
6.3.1. Степень отображения	266
6.3.2. Основная теорема алгебры	267
6.3.3. Интегрирование форм	268
6.3.4. Гауссово отображение гиперповерхности	269
Глава 7. Простейшие вариационные задачи римановой геометрии	271
7.1. Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнение Эйлера	271
7.2. Экстремальность геодезических	277
7.3. Минимальные поверхности	281
7.4. Вариационное исчисление и симплектическая геометрия	284

Глава 1

Введение в дифференциальную геометрию

1.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

1.1.1. Мотивировка

Рассмотрим евклидово пространство размерности n , которое мы в дальнейшем будем обозначать через \mathbf{R}^n . Будем считать, что в нем заданы декартовы координаты x^1, \dots, x^n относительно выбранного и фиксированного ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Напомним, что с декартовыми координатами тесно связано понятие евклидова скалярного произведения — билинейной формы, сопоставляющей каждой паре векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ вещественное число $\langle \xi, \eta \rangle$, причем эта операция является симметричной, линейной по каждому аргументу, а сама форма — положительно определенной. В декартовых координатах

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 + \dots + \xi^n \eta^n, \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n), \quad \eta = (\eta^1, \dots, \eta^n).$$

Однако декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач. Конечно, когда мы имеем дело с довольно простыми кривыми, например с окружностью или эллипсом, то их аналитическое выражение в декартовых координатах является весьма простым. Но весьма часто, например в физических задачах, встречаются, скажем, траектории движения материальных точек в поле каких-либо сил, явное выражение которых в декартовых координатах затруднительно. Например, следующее уравнение определяет в декартовых координатах спираль: $\sqrt{x^2 + y^2} - e^{\lambda(\arctg(y/x))} = 0$ (рис. 1.1). Конечно, эта запись не слишком сложна, но тем не менее эта кривая запишется значительно проще в другой, так называемой *полярной системе координат* (r, φ) , связанных с декартовыми

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$