

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	14
<b>Глава I. Краткие сведения о функциях нескольких переменных . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>§ 1. Евклидово <math>m</math>-мерное пространство и множества его точек; последовательности . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1. Понятие евклидова пространства . . . . .	16
1.2. Некоторые множества точек (фигуры) в евклидовом пространстве . . . . .	17
1.3. Линия; прямая; ломаная . . . . .	19
1.4. Связное множество . . . . .	20
1.5. Сходящаяся, ограниченная и бесконечно большая последовательности точек в $m$ -мерном евклидовом пространстве $E^m$ . . . . .	20
1.5.1. Определения последовательности и её предела (20). 1.5.2. Вспомогательная лемма (21). 1.5.3. Критерий Коши сходимости последовательности (22). 1.5.4. Ограниченная последовательность точек в $E^m$ ; подпоследовательности (22). 1.5.5. Бесконечно большая последовательность точек в $E^m$ (23).	
<b>§ 2. Пределы функции нескольких переменных в точке и на бесконечности; непрерывность . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1. Функция и её пределы в точке и на бесконечности . . . . .	24
2.1.1. Определения функции и её конечного предела в точке (по Гейне и по Коши) (24). 2.1.2. Эквивалентность определений конечных пределов в точке по Коши и по Гейне (25). 2.1.3. Конечный предел функции при стремлении аргумента к бесконечности (25). 2.1.4. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел (26). 2.1.5. Критерий Больцано–Коши существования предела функции (27). 2.1.6. Бесконечно большие функции (27). 2.1.7. Повторные пределы (28).	

2.2. Непрерывные функции нескольких переменных . . . .	29
2.2.1. Определение непрерывности функции нескольких переменных (29). 2.2.2. Разностная форма условия непрерывности (30).	
2.3. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных . . . . .	31
2.3.1. Арифметические операции над непрерывными функциями (31). 2.3.2. Непрерывность сложной функции (32). 2.3.3. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (33). 2.3.4. Теорема о продолжении непрерывной функцией любого промежуточного значения (33). 2.3.5. Ограниченность функции, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве (33). 2.3.6. Достижение функцией, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве, своих точных граней (33). 2.3.7. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных (34).	
<b>§ 3. Производные функции нескольких переменных . . . .</b>	<b>34</b>
3.1. Частные приращения функции нескольких переменных и частные производные. . . . .	34
3.2. Определение дифференцируемости функции нескольких переменных . . . . .	36
3.3. Определение дифференциала функции нескольких переменных. . . . .	38
3.4. Дифференцирование сложной функции. . . . .	39
3.5. Производная по направлению; градиент . . . . .	40
<b>§ 4. Частные производные высших порядков. . . . .</b>	<b>41</b>
4.1. Определение частных производных высших порядков	41
4.2. Теорема о смешанных производных . . . . .	42
<b>§ 5. Локальный экстремум функции нескольких переменных . . . . .</b>	<b>43</b>
5.1. Необходимые условия локального экстремума. . . . .	43
5.2. Достаточные условия локального экстремума . . . . .	44
<b>Глава II. Двойные интегралы . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>§ 6. Задача об объёме цилиндрического бруса . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>§ 7. Площадь плоской фигуры . . . . .</b>	<b>48</b>
7.1. $m$ -мерное евклидово пространство . . . . .	48
7.2. Площадь многоугольника . . . . .	50
7.3. Квадрируемость и площадь произвольной плоской фигуры . . . . .	51
7.4. Достаточный признак квадрируемости произвольной плоской фигуры . . . . .	56

7.5. Пример: площадь криволинейной трапеции . . . . .	59
7.6. Теоремы о монотонности и аддитивности площади фигуры . . . . .	60
<b>§ 8. Определение и существование двойного интеграла . .</b>	<b>63</b>
8.1. Определение двойного интеграла . . . . .	63
8.2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу . . . . .	65
8.3. Критерий интегрируемости функции двух перемен- ных (по Риману) . . . . .	76
<b>§ 9. Свойства двойного интеграла . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>§ 10. Некоторые физические и геометрические примене- ния двойных интегралов . . . . .</b>	<b>90</b>
10.1. Вычисление объёмов . . . . .	90
10.2. Вычисление площадей; масса пластинки . . . . .	91
10.3. Центр масс и момент инерции тела . . . . .	92
<b>§ 11. Сведение двойного интеграла к повторному . . . . .</b>	<b>100</b>
11.1. Предварительные рассуждения . . . . .	100
11.2. Случай прямоугольной области . . . . .	102
11.3. Случай криволинейной области . . . . .	106
<b>§ 12. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .</b>	<b>110</b>
12.1. Отображение областей . . . . .	110
12.2. Криволинейные координаты . . . . .	114
12.3. Полярные координаты . . . . .	115
12.4. Постановка задачи о замене переменных в двойном интеграле . . . . .	116
12.5. Площадь в криволинейных координатах . . . . .	116
12.6. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	121
<b>Глава III. Тройные и многомерные интегралы . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>§ 13. Некоторые вспомогательные понятия; объём про- странственной фигуры . . . . .</b>	<b>128</b>
13.1. Пространственная фигура . . . . .	128
13.2. Граничные и внутренние точки; область; последова- тельности точек и их пределы . . . . .	129
13.3. Пределы функций $n$ переменных; непрерывность . .	134
13.4. Дифференцируемость функций $n$ переменных; част- ные производные . . . . .	140
13.5. Объём многогранника; кубуруемость и объём про- извольной пространственной фигуры . . . . .	145
13.6. Кубуруемость и объём цилиндра и цилиндрического бруса . . . . .	149
13.7. Теоремы о монотонности и аддитивности объёма . .	162

<b>§ 14. Определение тройного интеграла; условие его существования</b> . . . . .	164
14.1. Определение тройного интеграла . . . . .	164
14.2. Суммы Дарбу и интегралы Дарбу . . . . .	166
14.3. Критерий интегрируемости функции трёх переменных (по Риману). . . . .	176
<b>§ 15. Свойства тройного интеграла</b> . . . . .	180
15.1. Линейность, аддитивность и монотонность . . . . .	181
15.2. Интегрируемость непрерывных функций; теорема о среднем. . . . .	188
15.3. Тройной интеграл как аддитивная функция области . . . . .	189
<b>§ 16. Некоторые применения тройных интегралов в физике и в геометрии</b> . . . . .	191
16.1. Вычисление объёмов; плотность и масса тела . . . . .	191
16.2. Координаты центра масс тела . . . . .	191
16.3. Момент инерции тела . . . . .	193
16.4. Притяжение материальной точки телом. . . . .	194
<b>§ 17. Сведение тройного интеграла к повторному</b> . . . . .	194
17.1. Сведение тройного интеграла по прямоугольному параллелепипеду к повторному. . . . .	195
17.2. Сведение тройного интеграла по криволинейной фигуре к повторному . . . . .	198
<b>§ 18. Замена переменной в тройном интеграле</b> . . . . .	202
18.1. Отображение пространственных областей . . . . .	202
18.2. Криволинейные координаты в пространстве. . . . .	205
18.3. Цилиндрические и сферические координаты . . . . .	205
18.3.1. Цилиндрические координаты (205). 18.3.2. Сферические координаты (207).	
18.4. Элемент объёма в криволинейных координатах; геометрический смысл якобиана . . . . .	209
18.5. Замена переменных в тройном интеграле . . . . .	211
<b>§ 19. Понятие о многомерных интегралах</b> . . . . .	215
19.1. Общие сведения . . . . .	215
19.2. Примеры . . . . .	216
<b>Глава IV. Векторы и векторные функции</b> . . . . .	219
<b>§ 20. Векторы и операции над ними.</b> . . . . .	219
20.1. Понятие вектора; равенство векторов . . . . .	219
20.2. Сложение векторов . . . . .	220
20.3. Вычитание векторов . . . . .	222
20.4. Умножение вектора на число. . . . .	223

<b>§ 21. Проекция вектора</b> . . . . .	224
21.1. Определение. . . . .	224
21.2. Свойства проекций. . . . .	225
21.3. Проекция вектора на оси координат . . . . .	227
21.4. Действия над векторами, заданными своими проекциями . . . . .	229
<b>§ 22. Скалярное произведение векторов</b> . . . . .	230
22.1. Определение. . . . .	230
22.2. Основные свойства скалярного произведения . . . . .	230
22.3. Скалярное произведение векторов, заданных проекциями . . . . .	230
22.4. Направляющие косинусы вектора . . . . .	231
<b>§ 23. Векторное произведение</b> . . . . .	232
23.1. Определение. . . . .	232
23.2. Основные свойства векторного произведения. . . . .	233
23.2.1. Условие коллинеарности (233). 23.2.2. Антикоммутативность (233). 23.2.3. Ассоциативность по числу (234). 23.2.4. Дистрибутивность (234).	
23.3. Векторное произведение векторов, заданных проекциями . . . . .	236
23.4. Двойное векторное произведение . . . . .	237
<b>§ 24. Смешанное произведение векторов</b> . . . . .	238
24.1. Определение и геометрическая интерпретация. . . . .	238
24.2. Условие компланарности; дистрибутивность . . . . .	240
24.3. Смешанное произведение в проекциях векторов . . . . .	241
<b>§ 25. Векторная функция</b> . . . . .	242
25.1. Векторная функция и её предел; непрерывность . . . . .	242
25.2. Производная векторной функции. . . . .	243
25.3. Производные скалярного и векторного произведений . . . . .	245
25.4. Годограф; особые точки . . . . .	247
25.5. Формула Тейлора . . . . .	247
25.6. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу . . . . .	247
25.6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов . . . . .	248
<b>Глава V. Основы теории кривых и поверхностей</b> . . . . .	249
<b>§ 26. Пространственные кривые</b> . . . . .	249
26.1. Векторное уравнение кривой. . . . .	249
26.2. Основной трёхгранник . . . . .	251
26.3. Формулы Френе . . . . .	252
26.4. Вычисление кривизны и кручения. . . . .	253

<b>§ 27. Параметрическое уравнение поверхности . . . . .</b>	<b>255</b>
27.1. Понятие поверхности . . . . .	255
27.2. Параметризация поверхности . . . . .	258
27.3. Параметрическое уравнение поверхности . . . . .	259
27.4. Кривые на поверхности . . . . .	260
27.5. Касательная плоскость . . . . .	261
27.6. Нормаль к поверхности и её направляющие ко- синусы . . . . .	263
27.7. Системы координат в касательных плоскостях . . . . .	265
<b>§ 28. Длины, углы и площади на кривой поверхности;         первая квадратичная форма поверхности . . . . .</b>	<b>266</b>
28.1. Аффинная система координат на плоскости . . . . .	266
28.2. Длина дуги на поверхности; первая квадратичная форма . . . . .	268
28.3. Угол между двумя кривыми . . . . .	271
28.4. Определение площади поверхности . . . . .	272
28.5. Вычисление площади гладкой поверхности . . . . .	273
<b>§ 29. Кривизна линий на поверхности; вторая квадратич-         ная форма . . . . .</b>	<b>279</b>
29.1. Нормальные сечения поверхности и их кривизна . . . . .	280
29.2. Вторая квадратичная форма поверхности . . . . .	282
29.3. Индикатриса кривизны поверхности . . . . .	285
29.4. Главные направления и главные кривизны поверхно- сти; формула Эйлера . . . . .	287
29.5. Вычисление главных кривизн . . . . .	289
29.6. Полная кривизна и главная кривизна . . . . .	290
29.7. Классификация точек на поверхности . . . . .	291
<b>Глава VI. Криволинейные интегралы . . . . .</b>	<b>294</b>
<b>§ 30. Криволинейные интегралы первого рода . . . . .</b>	<b>294</b>
30.1. Определение криволинейного интеграла первого ро- да на плоскости . . . . .	294
30.2. Свойства криволинейных интегралов . . . . .	299
30.3. Некоторые применения криволинейных интегралов первого рода . . . . .	300
30.4. Криволинейные интегралы первого рода в простран- стве . . . . .	303
<b>§ 31. Криволинейные интегралы второго рода . . . . .</b>	<b>304</b>
31.1. Постановка задачи; работа силового поля . . . . .	304
31.2. Определение криволинейного интеграла второго ро- да на плоскости . . . . .	305

31.3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода на плоскости . . . . .	306
31.4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода на плоскости . . . . .	309
31.5. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой . . . . .	313
31.6. Криволинейные интегралы вдоль самопересекающихся и замкнутых путей. . . . .	314
31.7. Криволинейные интегралы второго рода вдоль пространственных кривых . . . . .	315
<b>§ 32. Формула Грина</b> . . . . .	317
32.1. Вывод формулы Грина . . . . .	317
32.2. Вычисление площади по формуле Грина . . . . .	323
<b>§ 33. Условия независимости криволинейного интеграла от пути; интегрирование полных дифференциалов</b> . . . . .	324
33.1. Случай односвязной области. . . . .	324
33.2. Нахождение функции по её полному дифференциалу . . . . .	328
33.3. Криволинейные интегралы в многосвязной области . . . . .	331
<b>Глава VII. Поверхностные интегралы</b> . . . . .	335
<b>§ 34. Поверхностные интегралы первого рода</b> . . . . .	335
34.1. Определение поверхностного интеграла от скалярной функции . . . . .	335
34.2. Сведение поверхностного интеграла к двойному . . . . .	337
34.3. Некоторые применения поверхностных интегралов к механике. . . . .	342
34.3.1. Координаты центра масс материальной поверхности (342). 34.3.2. Моменты инерции материальной поверхности (344).	
34.4. Поверхностные интегралы от векторных функций . . . . .	345
<b>§ 35. Поверхностные интегралы второго рода</b> . . . . .	347
35.1. Сторона поверхности . . . . .	347
35.2. Определение поверхностного интеграла второго рода . . . . .	352
35.3. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу . . . . .	357
<b>§ 36. Формула Остроградского</b> . . . . .	361
36.1. Вывод формулы Остроградского . . . . .	361
36.2. Вычисление поверхностных интегралов с помощью формулы Остроградского; представление объёма пространственной области в виде поверхностного интеграла. . . . .	366

<b>§ 37. Формула Стокса</b> . . . . .	367
37.1. Вывод формулы Стокса . . . . .	367
37.2. Применение формулы Стокса к исследованию про- странственных криволинейных интегралов . . . . .	372
<b>Глава VIII. Теория поля</b> . . . . .	378
<b>§ 38. Скалярные поля</b> . . . . .	378
38.1. Определение и примеры скалярных полей . . . . .	378
38.2. Поверхности и линии уровня . . . . .	378
38.3. Различные типы симметрии скалярных полей . . . . .	380
38.4. Производная по направлению . . . . .	381
38.5. Градиент скалярного поля . . . . .	382
<b>§ 39. Векторные поля</b> . . . . .	385
39.1. Определение и примеры векторных полей . . . . .	385
39.2. Векторные линии и векторные трубки . . . . .	386
39.3. Различные виды симметрии векторных полей . . . . .	386
39.4. Поле градиента; потенциальное поле . . . . .	387
<b>§ 40. Поток векторного поля; дивергенция</b> . . . . .	389
40.1. Поток векторного поля через поверхность . . . . .	389
40.2. Дивергенция . . . . .	391
40.3. Соленоидальное поле . . . . .	394
40.4. Уравнение неразрывности . . . . .	395
40.5. Плоское течение жидкости; формула Остроградско- го для плоского векторного поля . . . . .	396
<b>§ 41. Циркуляция; ротор</b> . . . . .	398
41.1. Циркуляция векторного поля . . . . .	398
41.2. Ротор векторного поля; запись формулы Стокса в векторных обозначениях . . . . .	399
41.3. Символическая запись ротора . . . . .	401
41.4. Физический смысл ротора . . . . .	401
41.5. Ещё раз о потенциальных и соленоидальных полях . . . . .	403
<b>§ 42. Оператор Гамильтона</b> . . . . .	405
42.1. Символический вектор $\nabla$ . . . . .	405
42.2. Действия с вектором $\nabla$ . . . . .	406
<b>§ 43. Дифференциальные операторы второго порядка;   оператор Лапласа</b> . . . . .	410
43.1. Дифференциальные операторы второго порядка . . . . .	410
43.2. Уравнение теплопроводности . . . . .	413
43.3. Стационарное распределение температур; гармони- ческие поля . . . . .	415

---

<b>§ 44. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах</b> . . . . .	417
44.1. Постановка задачи . . . . .	417
44.2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве . . . . .	417
44.3. Цилиндрические и сферические координаты . . . . .	420
44.4. Градиент. . . . .	422
44.5. Дивергенция. . . . .	423
44.6. Ротор . . . . .	425
44.7. Оператор Лапласа. . . . .	426
44.8. Запись основных формул в цилиндрических и в сферических координатах. . . . .	427
<b>§ 45. Переменные поля в сплошных средах</b> . . . . .	430
45.1. Локальная и материальная производные . . . . .	430
45.2. Уравнения Эйлера. . . . .	432
45.3. Производная по времени от интеграла по жидкому объёму. . . . .	434
45.4. Другой вывод уравнения неразрывности . . . . .	436
<b>Глава IX. Линейное пространство</b> . . . . .	438
<b>§ 46. Понятие линейного пространства</b> . . . . .	438
46.1. Определение линейного пространства . . . . .	438
46.2. Некоторые свойства произвольных линейных пространств. . . . .	442
<b>§ 47. Базис и размерность линейного пространства</b> . . . . .	443
47.1. Понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. . . . .	443
47.2. Базис и координаты . . . . .	446
47.3. Размерность линейного пространства . . . . .	448
47.4. Понятие изоморфизма линейных пространств . . . . .	451
<b>§ 48. Подпространства линейных пространств</b> . . . . .	453
48.1. Понятия подпространства и линейной оболочки . . . . .	453
48.2. Новое определение ранга матрицы . . . . .	458
48.3. Сумма и пересечение подпространств . . . . .	459
48.3. Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств . . . . .	461
<b>§ 49. Преобразование координат при преобразовании базиса <math>n</math>-мерного линейного пространства</b> . . . . .	465
49.1. Прямое и обратное преобразование базисов . . . . .	465
49.2. Связь между преобразованием базисов и преобразованием соответствующих координат . . . . .	468

<b>Глава X. Евклидовы пространства</b> . . . . .	471
<b>§ 50. Вещественное евклидово пространство и его простейшие свойства</b> . . . . .	471
50.1. Определение вещественного евклидова пространства	471
50.2. Простейшие свойства произвольного вещественного евклидова пространства . . . . .	474
<b>§ 51. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства</b> . . . . .	478
51.1. Понятие ортонормированного базиса и его существование . . . . .	478
51.2. Свойства ортонормированного базиса . . . . .	482
51.3. Разложение $n$ -мерного евклидова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения . . . . .	484
51.4. Изоморфизм $n$ -мерных евклидовых пространств . . . . .	485
<b>§ 52. Комплексное евклидово пространство</b> . . . . .	487
52.1. Определение комплексного евклидова пространства	487
52.2. Неравенство Коши–Буняковского; понятие нормы вектора . . . . .	489
52.3. Ортонормированный базис и его свойства . . . . .	491
<b>Глава XI. Линейные операторы</b> . . . . .	496
<b>§ 53. Понятие линейного оператора; основные свойства</b> . . . . .	496
53.1. Краткие сведения о линейных пространствах . . . . .	496
53.2. Определение линейного оператора . . . . .	498
53.3. Действия над линейными операторами; пространство линейных операторов . . . . .	500
53.4. Свойства множества $L(V, V)$ линейных операторов	503
<b>§ 54. Матричная запись линейных операторов</b> . . . . .	512
54.1. Краткие сведения о матрицах . . . . .	512
54.1.1. Определение матрицы; квадратные матрицы (512). 54.1.2. Определитель (514). 54.1.3. Разложение определителя по произвольной строке и по произвольному столбцу; алгебраические дополнения (515). 54.1.4. Миноры; теорема о базисном миноре (516).	
54.2. Матрицы линейных операторов в заданном базисе линейного пространства $L^{(n)}$ . . . . .	518
54.3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису . . . . .	529
54.4. Характеристический многочлен линейного оператора . . . . .	533

<b>§ 55. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов</b> . . . . .	535
<b>§ 56. Линейные и полуторалинейные формы в евклидовом пространстве</b> . . . . .	540
56.1. Специальное представление линейной формы в евклидовом пространстве. . . . .	540
56.2. Полуторалинейные формы в евклидовом пространстве; специальное представление таких форм . . . . .	542
<b>§ 57. Линейные самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве</b> . . . . .	546
57.1. Понятие сопряжённого оператора . . . . .	546
57.2. Самосопряжённые операторы; основные свойства. . .	550
57.3. Норма линейного оператора . . . . .	552
57.4. Некоторые свойства самосопряжённых операторов. .	556
<b>§ 58. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов</b>	563
<b>§ 59. Унитарные и нормальные операторы; канонический вид линейных операторов; линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве</b> . . . . .	566
59.1. Унитарные и нормальные операторы . . . . .	566
59.2. Канонический вид линейных операторов . . . . .	571
59.3. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве . . . . .	573
59.3.1. Линейные операторы (573). 59.3.2. Ортогональные операторы (580).	
<b>Глава XII. Билинейные и квадратичные формы</b> . . . . .	584
<b>§ 60. Билинейные формы</b> . . . . .	584
60.1. Краткие сведения о матрицах . . . . .	584
60.2. Понятие билинейной формы . . . . .	590
60.3. Представление билинейной формы в конечномерном линейном пространстве. . . . .	591
60.4. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. . . . .	594
<b>§ 61. Квадратичные формы</b> . . . . .	596
61.1. Понятие квадратичной формы. . . . .	596
61.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов; метод Лагранжа . . . . .	599
61.3. Закон инерции квадратичных форм; критерий знакоопределённости. . . . .	602
Заключение. . . . .	605
Список литературы . . . . .	607
Предметный указатель . . . . .	609