ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию 7
Предисловие к первому изданию 8

Глава 1. **Введение** 11
§ 1.1. Как возникают экстремальные задачи? 11
1.1.1. Классическая изопериметрическая задача. Задача Дидоны (11). 1.1.2. Другие старинные экстремальные задачи в геометрии (16). 1.1.3. Вариационный принцип Ферма и принцип Гюйгенса. Задача о преломлении света (19). 1.1.4. Задача о брахистохроне. Зарождение вариационного исчисления (22). 1.1.5. Аэродинамическая задача Ньютона (24). 1.1.6. Задача о рационе и транспортная задача (25). 1.1.7. Задача о быстродействии (25).
§ 1.2. Как формализуются экстремальные задачи? 26
1.2.1. Основные определения (26). 1.2.2. Простейшие примеры формализации экстремальных задач (27). 1.2.3. Формализация задачи Ньютона (29). 1.2.4. Различные формализации классической изопериметрической задачи и задачи о брахистохроне. Простейшая задача о быстродействии (31). 1.2.5. Формализация транспортной задачи и задачи о рационе (33). 1.2.6. Основные классы экстремальных задач (34).
§ 1.3. Правило множителей Лагранжа и теорема Куна–Таккера 38
1.3.1. Теорема Ферма (38). 1.3.2. Правило множителей Лагранжа (40). 1.3.3. Теорема Куна–Таккера (44). 1.3.4. Доказательство конечномерной теоремы отделимости (48).
§ 1.4. Простейшая задача классического вариационного исчисления и ее обобщения 50
1.4.1. Уравнение Эйлера (50). 1.4.2. Необходимые условия в задаче Больца. Условия трансверсальности (55). 1.4.3. Расширения простейшей задачи (56). 1.4.4. Игольчатые вариации. Условие Вейерштрасса (63). 1.4.5. Изопериметрическая задача и задача со старшими производными (66).
§ 1.5. Задача Лагранжа и основная задача оптимального управления . . . 69
1.5.1. Постановки задач (69). 1.5.2. Необходимые условия в задаче Лагранжа (71). 1.5.3. Принцип максимума Понтрягина (72). 1.5.4. Доказательство принципа максимума в задаче со свободным концом (74).
§ 1.6. Решение задач 81
1.6.1. Геометрические экстремальные задачи (81). 1.6.2. Аэродинамическая задача Ньютона (85). 1.6.3. Простейшая задача о быстро-

действии (88). 1.6.4. Классическая изопериметрическая задача и задача Чаплыгина (92). 1.6.5. Задача о брахистохроне и некоторые задачи геометрии (96).

Глава 2. **Аппарат теории экстремальных задач** 98

§ 2.1. Предварительные сведения из функционального анализа 98

2.1.1. Линейные нормированные и банаховы пространства (98). 2.1.2. Произведение пространств. Фактор-пространство (100). 2.1.3. Теорема Хана–Банаха и ее следствия (102). 2.1.4. Теоремы отделимости (105). 2.1.5. Теорема Банаха об обратном операторе и лемма о правом обратном отображении (108). 2.1.6. Лемма о замкнутости образа (110). 2.1.7. Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора (111). 2.1.8. Измеримые и абсолютно непрерывные функции (111). 2.1.9. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в пространстве C. Формула Дирихле (114).

§ 2.2. Основы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах 116

2.2.1. Производная по направлению, первая вариация, производные Гато и Фреше, строгая дифференцируемость (117). 2.2.2. Теорема о суперпозиции дифференцируемых отображений (123). 2.2.3. Теорема о среднем и ее следствия (125). 2.2.4. Дифференцирование в произведении пространств. Частные производные. Теорема о полном дифференциале (128). 2.2.5. Производные высших порядков. Формула Тейлора (131).

§ 2.3. Теорема о неявной функции. 138

2.3.1. Формулировка теоремы о существовании неявной функции (138). 2.3.2. Модифицированный принцип сжимающих отображений (138). 2.3.3. Доказательство теоремы (140). 2.3.4. Классические теоремы о неявной функции и об обратном отображении (142). 2.3.5. Касательное пространство и теорема Люстерника (147).

§ 2.4. Дифференцируемость некоторых конкретных отображений 150

2.4.1. Оператор Немыцкого и оператор дифференциальной связи (150). 2.4.2. Интегральный функционал (153). 2.4.3. Оператор краевых условий (156).

§ 2.5. Необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений 158

2.5.1. Основные предположения (159). 2.5.2. Локальная теорема существования (160). 2.5.3. Теорема единственности (163). 2.5.4. Линейные дифференциальные уравнения (165). 2.5.5. Глобальная теорема о существовании и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров (169). 2.5.6. Теорема о дифференцируемой зависимости решений от начальных данных (174). 2.5.7. Классическая теорема о дифференцируемой зависимости решений от начальных данных (177).

§ 2.6*. Элементы выпуклого анализа 180

2.6.1. Основные определения (180). 2.6.2. Выпуклые множества и функции в линейных топологических пространствах (187).

2.6.3. Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля. Теорема Фенхеля–Моро (194). 2.6.4. Субдифференциал. Теорема Моро–Рокафеллара. Теорема Дубовицкого–Милютина (198).

Глава 3. **Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями** 206

§ 3.1. Элементарные задачи 206

3.1.1. Элементарные задачи без ограничений (206). 3.1.2. Элементарная задача линейного программирования (210). 3.1.3. Задача Больца (211). 3.1.4. Элементарная задача оптимального управления (214). 3.1.5. Принцип Лагранжа для задач с равенствами и неравенствами (214).

§ 3.2. Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств 217

3.2.1. Формулировка теоремы (217). 3.2.2. Правило множителей для гладких задач с равенствами (218). 3.2.3. Редукция задачи (220). 3.2.4. Доказательство теоремы (222).

§ 3.3*. Принцип Лагранжа и двойственность в задачах выпуклого программирования 225

3.3.1. Теорема Куна–Таккера (субдифференциальная форма) (225). 3.3.2. Метод возмущений и теорема двойственности (227). 3.3.3. Линейное программирование: теорема существования и теорема двойственности (232). 3.3.4. Теорема двойственности для задачи о кратчайшем расстоянии. Лемма Хоффмана и лемма о минимаксе (237).

§ 3.4*. Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в гладких задачах 248

3.4.1. Гладкие задачи с равенствами (248). 3.4.2. Гладкие задачи с равенствами и неравенствами — необходимые условия второго порядка (250). 3.4.3. Достаточные условия экстремума для гладких задач с равенствами и неравенствами (253).

Глава 4. **Принцип Лагранжа в задачах классического вариационного исчисления и оптимального управления** 257

§ 4.1. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа 257

4.1.1. Постановка задачи и формулировка теоремы (257). 4.1.2. Редукция задачи Лагранжа к гладкой задаче (262). 4.1.3. Обобщенная лемма Дюбуа-Реймона (264). 4.1.4. Вывод условий стационарности (266). 4.1.5. Задача со старшими производными. Уравнение Эйлера– Пуассона (268).

§ 4.2. Принцип максимума Понтрягина 271

4.2.1. Постановка задачи оптимального управления (271). 4.2.2. Формулировка принципа максимума. Принцип Лагранжа в задаче оптимального управления (276). 4.2.3. Игольчатые вариации (278). 4.2.4. Редукция к конечномерной задаче (281). 4.2.5. Доказательство принципа максимума (283). 4.2.6. Доказательство леммы о пакете иголок (288). 4.2.7. Доказательство леммы об интегральных функционалах (297).

§ 4.3*. Задачи оптимального управления, линейные по фазовым переменным 299

4.3.1. Редукция задачи оптимального управления, линейной по фазовым переменным, к задаче ляпуновского типа (299). 4.3.2. Теорема Ляпунова (302). 4.3.3. Принцип Лагранжа для ляпуновских задач (305). 4.3.4. Теорема двойственности (312). 4.3.5. Принцип максимума для задач оптимального управления, линейных по фазовым переменным (315).

§ 4.4. Применение общей теории к простейшей задаче классического вариационного исчисления 319

4.4.1. Уравнение Эйлера. Условие Вейерштрасса. Условие Лежандра (319). 4.4.2. Условия второго порядка для слабого экстремума. Условия Лежандра и Якоби (322). 4.4.3. Гамильтонов формализм. Теорема об интегральном инварианте (325). 4.4.4. Достаточные условия сильного экстремума в простейшей задаче (333). 4.4.5. Сопряженные точки. Достаточные условия сильного и слабого экстремумов (337). 4.4.6. Теорема Э. Нётер (346). 4.4.7. Вариационный принцип и законы сохранения в механике (351).

Приложение (*В.М. Тихомиров*). О замыслах В.М. Алексеева по усовершенствованию книги 354

Комментарии и путеводитель по литературе 358

Список литературы 361

Список основных обозначений 368

Предметный указатель 373