ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Начальные геометрические сведения** 6

§ 1. Точки, прямые, отрезки 6
1. Точка (6). 2. Прямая линия (6). 3. Луч и отрезок (9). 4. Несколько задач (10). 5. Угол (13). 6. Полуплоскость (14).

§ 2. Измерение отрезков и углов 17
7. Равенство геометрических фигур (17). 8. Сравнение отрезков и углов (17). 9. Середина отрезка и биссектриса угла (18). 10. Измерение отрезков и углов (19). 11. О числах (20).

§ 3. Перпендикулярные и параллельные прямые. 25
12. Перпендикулярные прямые (25). 13. Признаки параллельности двух прямых (28). 14. Практические способы построения параллельных прямых (31). 15. А есть ли квадрат? (32). 16. Заключительные замечания (34).

Глава 2. **Треугольники** 37

§ 1. Треугольники и их виды 37
17. Треугольник (37). 18. Внешний угол треугольника (38). 19. Классификация треугольников (39). 20. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника (40).

§ 2. Равнобедренный треугольник 43
21. Теорема об углах равнобедренного треугольника (43). 22. Признак равнобедренного треугольника (43). 23. Теорема о высоте равнобедренного треугольника (44).

§ 3. Соотношения между сторонами и углами треугольника 46
24. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника (46). 25. Обратные теоремы (47). 26. Неравенство треугольника (49).

§ 4. Признаки равенства треугольников 52
27. Три признака равенства треугольников (52). 28. Есть ли другие признаки равенства треугольников? (56). 29. Признаки равенства треугольников, использующие медианы, биссектрисы и высоты (61).

§ 5. Признаки равенства прямоугольных треугольников 68
30. Пять признаков равенства прямоугольных треугольников (68). 31. Серединный перпендикуляр к отрезку. Осевая симметрия (72). 32. Расстояние от точки до прямой (75). 33. Свойство биссектри-

сы угла (75). 34. Теорема о пересечении биссектрис треугольника (77).

§ 6. Задачи на построение 79
35. Окружность. Центральная симметрия (79). 36. Взаимное расположение прямой и окружности (81). 37. Окружность, вписанная в треугольник (84). 38. Взаимное расположение двух окружностей (85). 39. Построение треугольника по трем сторонам (88). 40. Основные задачи на построение (91). 41. Еще несколько задач на построение треугольника (94).

Глава 3. **Параллельные прямые** 101

§ 1. Аксиома параллельных прямых 101
42. Аксиомы (101). 43. Основные понятия (102). 44. Система аксиом планиметрии (104). 45. Два следствия из аксиом (108). 46. О теоремах (109). 48. Аксиома параллельных прямых (114). 49. О пятом постулате Евклида (116). 50. Еще раз о существовании квадрата (117).

§ 2. Свойства параллельных прямых 119
51. Расстояние между параллельными прямыми (119). 52. Еще один способ построения параллельных прямых (120). 53. Задачи на построение (121).

Глава 4. **Дальнейшие сведения о треугольниках** 127

§ 1. Сумма углов треугольника. Средняя линия треугольника 127
54. Задача о разрезании треугольника (127). 55. Сумма углов треугольника (129). 56. Средняя линия треугольника (134). 57. Теорема Фалеса (134). 58. Неожиданный факт (136).

§ 2. Четыре замечательные точки треугольника 139
59. Теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (139). 60. Окружность, описанная около треугольника (141). 61. Теорема о пересечении высот треугольника (142). 62. Размышления о точке пересечения медиан треугольника (143). 63. Теорема о пересечении медиан треугольника (145).

Глава 5. **Многоугольники** 150

§ 1. Выпуклый многоугольник 150
64. Ломаная (150). 65. Многоугольник (152). 66. Выпуклый многоугольник (158). 67. Выпуклая линия (161). 68. Замкнутая линия (162). 69. Замкнутая выпуклая линия (163). 70. Вписанный многоугольник (164). 71. Описанный многоугольник (166).

§ 2. Четырехугольники 168
72. Свойство диагоналей выпуклого четырехугольника (168). 73. Характеристическое свойство фигуры (170). 74. Параллелограмм (170). 75. Теоремы Вариньона и Гаусса (172). 76. Прямоугольник, ромб и квадрат (173). 77. Трапеция (176).

Глава 6. **Площадь** 180

§ 1. Равносоставленные многоугольники 180
78. Задачи на разрезание многоугольников (180). 79. Равносоставленные многоугольники (183). 80. Разрезание квадрата на неравные квадраты (185).

§ 2. Понятие площади 188
81. Измерение площади многоугольника (188). 82. Площадь произвольной фигуры (193).

§ 3. Площадь треугольника 197
84. Площади прямоугольника, параллелограмма и треугольника (197). 85. Равновеликие многоугольники (198). 86. Метод Евклида (200). 87. Две теоремы об отношении площадей треугольников (201). 88. Две теоремы о биссектрисах треугольника (203). 89. Признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины (204).

§ 4. Формула Герона и ее приложения 210
90. Формула Герона (210). 91. Теорема о медиане (211). 92. Формула биссектрисы треугольника (212).

§ 5. Теорема Пифагора 213
93. Обобщенная теорема Пифагора (213). 94. Задача о разрезании квадратов (215).

Глава 7. **Подобные треугольники** 219

§ 1. Признаки подобия треугольников 219
95. Подобие и равенство треугольников (219). 96. Другие признаки подобия треугольников (222). 97. Тригонометрические функции (224).

§ 2. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач . . 230
98. Обобщенная теорема Фалеса (230). 99. Следствие из обобщенной теоремы Фалеса (232). 100. Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике (235). 101. Теорема Чевы (237). 102. Теорема Менелая (241).

§ 3. Задачи на построение 245
103. Среднее геометрическое (245). 104. Среднее арифметическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное для двух отрезков (246). 105. Метод подобия (247).

§ 4. О замечательных точках треугольника 255
106. О высотах треугольника (255). 107. О биссектрисах треугольника (257). 108. Еще две точки, связанные с треугольником (258).

Глава 8. **Окружность** 260

§ 1. Свойства окружности 260
109. Характеристическое свойство окружности (260). 110. Задачи на построение (260). 111. Кривые постоянной ширины (263).

§ 2. Углы, связанные с окружностью 268
112. Вписанные углы (268). 113. Углы между хордами и секущими (271). 114. Угол между касательной и хордой (272). 115. Теорема о квадрате касательной (273). 116. Теорема Паскаля (275). 117. Вневписанные окружности треугольника (276).

Глава 9. **Векторы** 285

§ 1. Сложение векторов 285
118. Сонаправленные векторы (285). 119. Равенство векторов (288). 120. Сумма векторов (289).

§ 2. Умножение вектора на число 292
121. Произведение вектора на число (292). 122. Несколько задач (294).

Глава 10. **Метод координат** 298

§ 1. Координаты точек и векторов 298
123. Ось координат (298). 124. Прямоугольная система координат (299). 125. Координаты вектора (300). 126. Длина вектора и расстояние между двумя точками (302). 127. Теорема Стюарта (302).

§ 2. Уравнения прямой и окружности 304
128. Перпендикулярные векторы (304). 129. Уравнение прямой (305). 130. Уравнение окружности (306).

§ 3. Радикальная ось и радикальный центр окружностей. 309
131. Радикальная ось двух окружностей (309). 132. Расположение радикальной оси относительно окружностей (311). 133. Радикальный центр трех окружностей (313). 134. Теорема Брианшона (315).

§ 4. Гармонические четверки точек 317
135. Примеры гармонических четверок (317). 136. Поляра (320). 137. Четырехвершинник (321). 138. Построение касательной с помощью одной линейки (322).

Глава 11. **Тригонометрические соотношения в треугольнике. Скалярное произведение векторов** 324

§ 1. Соотношения между сторонами и углами треугольника 324
139. Синус и косинус двойного угла (324). 140. Тригонометрические функции произвольных углов (325). 141. Формулы приведения (325). 142. Еще одна формула площади треугольника (326). 143. Теорема синусов (327). 144. Теорема косинусов (328).

§ 2. Использование тригонометрических формул при решении геометрических задач 331
145. Синус и косинус суммы и разности углов (331). 146. Теорема Морлея (333). 147. Площадь четырехугольника (335). 148. Площади вписанных и описанных четырехугольников (337).

§ 3. Скалярное произведение векторов 339
149. Угол между векторами (339). 150. Определение и свойства скалярного произведения векторов (341). 151. Теорема Эйлера (343). 152. Теорема Лейбница (344).

Глава 12. **Правильные многоугольники. Длина и площадь** 347
§ 1. Правильные многоугольники 347
153. Равносторонние и равноугольные многоугольники (347). 154. Построение правильных многоугольников (350).
§ 2. Длина 355
155. Длина окружности (355). 156. Длина линии (357).
§ 3. Площадь 363
158. Площадь фигуры (363). 159. Первый замечательный предел (365). 160. Изопериметрическая задача (367).

Глава 13. **Геометрические преобразования** 374
§ 1. Движения 374
161. Осевая симметрия (374). 162. Движение (375). 163. Использование движений при решении задач (377).
§ 2. Центральное подобие 386
164. Свойства центрального подобия (386). 165. Теорема Наполеона (388). 166. Задача Эйлера (389). 167. Прямая Симсона (392).
§ 3. Инверсия 396
168. Определение инверсии (396). 169. Основные свойства инверсии (398). 170. Теорема Птолемея (401). 171. Формула Эйлера (402). 172. Окружности Аполлония (402). 173. Окружности Аполлония нужны даже флибустьерам (405). 174. Теорема Фейербаха (407). 175. Задача Аполлония (408).

Приложение 1. Снова о числах* 414
176. Неотрицательные вещественные числа (414). 177. Сравнение неотрицательных вещественных чисел (417). 178. Сложение неотрицательных вещественных чисел (417). 179. Умножение положительных вещественных чисел (418). 180. Отрицательные вещественные числа (419). 181. Точная верхняя грань (420). 182. Теорема Вейерштрасса (421). 183. Двоичная форма записи числа (421). 184. О взаимном расположении прямой и окружности (423). 185. Об измерении углов (426). 186. О взаимном расположении двух окружностей (427).

Приложение 2. Снова о геометрии Лобачевского 430

Ответы и указания 437

Наш блокнот 471

Именной указатель 473

Предметный указатель 474