

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава 1. Введение	11
1.1. Предмет алгебры	11
1.2. Арифметические векторы	12
1.3. Линейная зависимость и независимость	16
1.4. Подстановки и перестановки	19
1.5. Определитель и формулы Крамера	22
1.6. Теорема Лапласа	28
1.7. Операции с матрицами	31
1.8. Обратная матрица	37
1.9. Формула Бине–Коши	40
1.10. Ранг матрицы	43
1.11. Однородные системы	48
1.12. Скалярное и векторное произведения	49
1.13. Кривые второго порядка	56
1.14. Ступенчатые матрицы и треугольные разложения	64
1.15. Алгоритмы и оценки сложности вычислений	68
1.16. Комплексные числа и комплексные матрицы	73
Глава 2. Что нужно знать о группах	79
2.1. Определение группы	79
2.2. Избыточность в определении группы	84
2.3. Аддитивные и мультипликативные группы	85
2.4. Изоморфизмы групп	87
2.5. Группа корней n -й степени из единицы	89
2.6. Группы и подгруппы	91
2.7. Смежные классы и нормальные подгруппы	93
2.8. Циклические группы	96
2.9. Действие группы на множестве	98

2.10. Группа движений	101
2.11. Группа дробно-линейных преобразований комплексной плоскости	102
2.12. Гомоморфизмы групп	103
2.13. Теорема Кэли о конечных группах	106
2.14. Конечно порожденные абелевы группы	107
Глава 3. Кольца, поля, многочлены	111
3.1. Определения кольца и поля	111
3.2. Поле вычетов	116
3.3. Кольцо многочленов	118
3.4. Деление с остатком и алгоритм Евклида	120
3.5. Разложение на неприводимые множители	124
3.6. Многочлены с целыми коэффициентами	126
3.7. Круговые многочлены	129
3.8. Поле частных	130
3.9. Многочлены от нескольких переменных	132
3.10. Матрица Сильвестра и результат	136
3.11. Симметрические многочлены	139
Глава 4. Линейные пространства, поля и их расширения	144
4.1. Линейные пространства и подпространства	144
4.2. Базисы и размерность	148
4.3. Конечные и алгебраические расширения полей	153
4.4. Присоединение корня	156
4.5. Поле разложения	159
4.6. Производная многочлена и кратные корни	162
4.7. Неприводимость круговых многочленов	164
4.8. Малая теорема Веддерберна	165
4.9. Конечные поля	166
4.10. Мультипликативная группа конечного поля	168
4.11. Расширения полей в геометрии	170
4.12. Основная теорема алгебры	171
Глава 5. Линейные операторы	177
5.1. Определение линейного оператора	177
5.2. Операторы и матрицы	180

5.3. Характеристический многочлен	184
5.4. Матричные многочлены и подобие	189
5.5. Собственные значения и собственные векторы	193
5.6. Теорема Шура и нормальные матрицы	196
5.7. Сингулярное разложение	200
5.8. Инвариантные пространства и прямая сумма операторов	206
5.9. Нильпотентные операторы и корневое разложение	210
5.10. Пространства Крылова и максимальное расщепление	213
5.11. Жорданова форма	219
5.12. Блочная жорданова форма вещественной матрицы	221
5.13. Вычисление минимального многочлена	224
5.14. Резольвенты Лагранжа	228
Глава 6. Нормы и неравенства	236
6.1. Расстояния, нормы, длины	236
6.2. Сходимость, полнота, пополнение	240
6.3. Ограниченность, замкнутость, компактность	244
6.4. Нормы линейных операторов	250
6.5. Выпуклые множества и выпуклые функции	253
6.6. Неравенства Гёльдера и Минковского	259
6.7. Наилучшие приближения на выпуклых множествах	261
6.8. Разделяющие и опорные гиперплоскости	263
6.9. Продолжение линейных функционалов	266
6.10. Системы линейных неравенств	269
6.11. Грани полиэдра и выпуклые многогранники	273
6.12. Сопряженный оператор и нормальные операторы	276
6.13. Собственные значения эрмитовых матриц	280
6.14. Конгруэнтность и закон инерции	286
6.15. Мажоризация и двоякостochasticеские матрицы	289
6.16. Унитарно инвариантные нормы	294
Глава 7. Группы, поля, уравнения	299
7.1. Линейная независимость автоморфизмов поля	299
7.2. Неподвижные поля и группы автоморфизмов	301
7.3. Группы Галуа и поля разложения	304
7.4. Вычисление группы Галуа	309
7.5. Теория Галуа	313

7.6. Прimitивные расширения	315
7.7. Циклические и радикальные расширения.	317
7.8. Полициклические расширения	319
7.9. Теорема Абеля–Галуа	322
7.10. Казус Руффини	327
7.11. Концептуальный вывод основной теоремы алгебры.	330
7.12. Теорема Силова	332
Глава 8. Кольца и идеалы.	336
8.1. Идеалы и вычеты	336
8.2. Идеалы и модули	339
8.3. Радикалы и нильпотенты.	341
8.4. Простые и примарные идеалы	342
8.5. Кольца частных, расширения и сужения идеалов.	347
8.6. Максимальные идеалы и локальные кольца.	350
8.7. Упорядоченные множества	353
8.8. Неконструктивные построения.	357
8.9. Алгебраическое замыкание поля	360
8.10. Алгебраическая зависимость и независимость	362
8.11. Целая алгебраическая зависимость	366
8.12. Дифференцирования в кольцах и полях.	372
8.13. Теорема Гильберта о базисе.	375
8.14. Деление с остатком и базисы Грёбнера	377
8.15. Критерий Бухбергера.	381
Глава 9. Алгебраические многообразия	386
9.1. Множества нулей и аннуляторы	386
9.2. Условие совместности	389
9.3. Теорема Нётер о нормализации	391
9.4. Теорема Гильберта о нулях	394
9.5. Неприводимые многообразия	397
9.6. Координатные кольца и полиномиальные отображения.	399
9.7. Рациональные отображения	403
9.8. Проекции многообразия	405
9.9. Конструктивные множества	411
9.10. Размерность и степень.	413
9.11. Размерность собственного подмногообразия.	421

9.12. Размерность многообразия и ранг матрицы Якоби	422
9.13. Размерность пересечения многообразий	425
9.14. Комплексные многообразия	431
9.15. Подготовительная теорема Вейерштрасса	435
9.16. Применение теорем о неявной функции	439
9.17. Главные тензорные ранги трехмерных матриц	446
Список литературы	449
Предметный указатель	451