

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	15
Введение; основы концепции	17

I. Математические основания теории

Глава 1. Элементы теории векторов и тензоров	22
1.1. Системы координат. Базисные векторы	22
1.1.1. Декартова система координат	22
1.1.2. Сферическая система координат	23
1.1.3. Циклическая система координат	24
1.1.4. Спиральные базисные векторы	26
1.1.5. Соотношения между различными базисными векторами	26
1.2. Векторы. Тензоры	30
1.2.1. Векторные компоненты	30
1.2.2. Скалярное произведение векторов	33
1.2.3. Векторное произведение векторов	33
1.2.4. Произведения, содержащие три и более векторов	34
1.2.5. Тензоры δ_{ik} и ε_{ikl}	35
1.3. Дифференциальные операторы	36
1.3.1. Оператор ∇	36
1.3.2. Оператор Лапласа	37
1.3.3. Дифференциальные операции со скалярами и векторами	37
1.4. Поворот системы координат	40
1.4.1. Описание поворотов в терминах углов Эйлера	40
1.4.2. Описание поворотов в терминах оси вращения и угла поворота	42
1.4.3. Описание поворотов в терминах унитарных 2×2 матриц; параметры Кэли–Клейна	43
1.4.4. Соотношения между различными описаниями вращений	45
1.4.5. Оператор поворота	47
1.4.6. Преобразование декартовых компонент векторов и тензоров при поворотах координатных систем; матрица поворота a	48
1.4.7. Сложение поворотов	51
1.5. Группа трехмерных вращений	55
1.5.1. Определение и общие понятия группы	55
1.5.2. Свойства непрерывных групп R^3 , $SO(3)$ и $SU(2)$	56
1.5.3. Неприводимые представления группы вращений	58
Глава 2. Операторы угловых моментов	60
2.1. Оператор полного углового момента	60
2.1.1. Определение	60
2.1.2. Коммутационные соотношения	60

2.1.3. Инверсия координат; обращение времени	63
2.1.4. Полный угловой момент системы; орбитальный и спиновый угловые моменты	63
2.2. Оператор орбитального углового момента	64
2.2.1. Определение	64
2.2.2. Коммутационные соотношения	65
2.2.3. Явный вид оператора $\hat{\mathbf{L}}$	66
2.3. Оператор спинового углового момента	67
2.3.1. Определение	67
2.3.2. Коммутационные соотношения	67
2.3.3. Явный вид оператора	68
2.3.4. След произведений спиновых матриц	68
2.4. Поляризационный оператор	69
2.4.1. Определение	69
2.4.2. Явный вид	70
2.4.3. Свойства оператора $\hat{\mathbf{T}}_{LM}(S)$ при преобразованиях системы координат	70
2.4.4. Разложение по поляризационным операторам	71
2.4.5. Коммутаторы и антикоммутаторы	72
2.4.6. След от произведения поляризационных операторов	72
2.5. Спиновые матрицы для $S = 1/2$	72
2.5.1. Явный вид матриц	72
2.5.2. Коммутаторы и антикоммутаторы	73
2.5.3. Произведение спиновых матриц	73
2.5.4. Функции спиновых матриц	74
2.5.5. Операторы поворота	75
2.5.6. След произведения спиновых операторов ($S = 1/2$)	76
2.6. Спиновые матрицы и поляризационный оператор для $S = 1$	77
2.6.1. Спин $S = 1$	77
2.6.2. Явный вид матриц	78
2.6.3. Произведения спиновых и поляризационных матриц	81
2.6.4. Функции спиновых матриц	83
2.6.5. Операторы поворота системы координат	83
2.6.6. След произведения спиновых матриц	85
Глава 3. Неприводимые тензоры	86
3.1. Определение и свойства неприводимых тензоров	86
3.1.1. Определение	86
3.1.2. Ковариантные и контравариантные компоненты	87
3.1.3. Преобразование неприводимых тензоров при повороте системы координат	87
3.1.4. Преобразование неприводимых тензоров при инверсии системы координат	87
3.1.5. Двойные тензоры	88
3.1.6. Примеры неприводимых тензоров	88
3.1.7. Прямые и неприводимые тензорные произведения; коммутаторы тензорных произведений	88
3.1.8. Скалярные произведения неприводимых тензоров	89
3.2. Связь алгебры неприводимых тензоров с векторной и тензорной алгеброй	90
3.2.1. Векторы и неприводимые тензоры	90
3.2.2. Декартовы тензоры второго и третьего ранга	92
3.2.3. Дифференциальные операторы как неприводимые тензорные произведения	93

3.3. Изменение схемы связывания в неприводимых тензорных произведениях	94
3.3.1. Соотношения, общие для коммутирующих и некоммутирующих тензоров	95
3.3.2. Соотношения для коммутирующих тензоров	95
3.3.3. Соотношения для некоммутирующих тензоров	96
Глава 4. D-функции Вигнера	98
4.1. Определение $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	98
4.2. Дифференциальные уравнения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	100
4.3. Явный вид D -функций Вигнера	103
4.3.1. Выражения $d_{MM'}^J(\beta)$, включающие тригонометрические функции	103
4.3.2. Дифференциальные представления $d_{MM'}^J(\beta)$	104
4.3.3. Интегральные представления $d_{MM'}^J(\beta)$	104
4.3.4. Соотношения между $d_{MM'}^J(\beta)$ и полиномами Якоби	105
4.3.5. Соотношения между $d_{MM'}^J(\beta)$ и гипергеометрической функцией	105
4.4. Симметрия $d_{MM'}^J(\beta)$ и $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	106
4.5. Матрица поворота $U_{MM'}^J$ в представлении углов ω, Θ, Φ	107
4.5.1. Определение	107
4.5.2. Явный вид матрицы $U_{MM'}^J$	108
4.5.3. Дифференциальные уравнения	109
4.5.4. Ортогональность и полнота	109
4.5.5. Основные свойства	110
4.5.6. Частные случаи	111
4.6. Суммы, содержащие D -функции.	112
4.6.1. Разложение Клебша–Гордана	112
4.6.2. Некоторые приложения разложений Клебша–Гордана	112
4.6.3. Обобщение разложения Клебша–Гордана	113
4.6.4. Определитель матрицы $D_{MM'}^J$	114
4.7. Сложение поворотов.	114
4.7.1. Теорема сложения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	114
4.7.2. Теорема сложения для $d_{MM'}^J(\beta)$	115
4.7.3. Сложение двух одинаковых поворотов	116
4.7.4. Теорема умножения для $d_{MM'}^J(\beta)$	116
4.7.5. Суммы, содержащие D -функции различных аргументов	116
4.7.6. Сумма Понзано–Редже	117
4.8. Рекуррентные соотношения для $D_{MM'}^J$	118
4.8.1. Соотношения между D^J и $D^{J\pm 1}$	118
4.8.2. Соотношения между D^J и $D^{J\pm 1/2}$	120
4.8.3. Соотношения между $D_{MM'}^J$ и $D_{M\pm 1M'\mp 1}^J$	120
4.9. Дифференциальные соотношения для $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	121
4.10. Ортогональность и полнота D -функций.	122
4.11. Интегралы, включающие D -функции	124
4.11.1. Интегралы от произведений $D_{MM'}^J$	124
4.11.2. Интегралы, содержащие $d_{MM'}^J(\beta)$	125
4.12. Инвариантные суммы интегралов, содержащих $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	125

4.13. Производящие функции для $d_{MM'}^J(\beta)$	126
4.14. Характеры $\chi^J(R)$ неприводимых представлений группы вращений	127
4.14.1. Определение	127
4.14.2. Явный вид	128
4.14.3. Основные свойства	129
4.14.4. Дифференциальное уравнение	130
4.14.5. Дифференциальные соотношения	130
4.14.6. Алгебраические соотношения	130
4.14.7. Ортогональность и полнота	131
4.14.8. Интегралы, содержащие $\chi^J(\omega)$	131
4.14.9. Суммы, содержащие $\chi^J(\omega)$	131
4.14.10. Частные значения $\chi^J(\omega)$ при определенных значениях ω	133
4.14.11. Частные случаи $\chi^J(\omega)$	133
4.15. Обобщенные характеры $\chi^J(\omega)$ неприводимых представлений группы вращений	134
4.15.1. Определение	134
4.15.2. Явный вид	134
4.15.3. Основные свойства	136
4.15.4. Дифференциальное уравнение	137
4.15.5. Ортогональность и полнота	137
4.15.6. Теорема сложения для $\chi_\lambda^J(\omega)$	137
4.15.7. Суммы и бесконечные ряды, содержащие $\chi_\lambda^J(\omega)$	138
4.15.8. Частные случаи $\chi_\lambda^J(\omega)$ для отдельных значений λ	139
4.15.9. Частные случаи $\chi_\lambda^J(\omega)$ для отдельных значений J	140
4.16. $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ для частных значений аргументов	140
4.17. Частные случаи $D_{MM'}^J$ для определенных значений M или M'	141
4.18. Асимптотика $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$	143
4.18.1. Большие угловые моменты	143
4.18.2. Разложение $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ при $\beta \ll 1$ и $\pi - \beta \ll 1$	144
4.18.3. Бесконечно малые повороты	144
4.19. Определение $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ в работах других авторов	144
4.20. Частные случаи для $d_{MM'}^J(\beta)$ при определенных J, M и M'	145
4.21. Таблицы $d_{MM'}^J(\beta)$ для $\beta = \pi/2$	145
4.22. Частные случаи $U_{MM'}^J(\omega; \Theta, \Phi)$	145
Глава 5. Сферические функции	158
5.1. Определение	158
5.1.1. Коммутационные соотношения	158
5.1.2. Дифференциальные уравнения	158
5.1.3. Граничные условия	159
5.1.4. Нормировка	159
5.1.5. Выбор фазы	160
5.1.6. Зональные, секториальные, тессеральные гармоники	160
5.1.7. Уравнения, решения которых выражаются в терминах $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	161

5.2. Явный вид сферических функций и их соотношения с другими функциями	162
5.2.1. Дифференциальные представления $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	162
5.2.2. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде разложения в ряд по тригонометрическим функциям от $\vartheta/2$	163
5.2.3. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде конечных сумм по тригонометрическим функциям от ϑ	164
5.2.4. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ через гипергеометрические функции с аргументами в виде тригонометрических функций от $\vartheta/2$	165
5.2.5. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ через гипергеометрические функции с аргументами в виде тригонометрических функций от ϑ	165
5.2.6. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде гипергеометрических функций от экспоненциального аргумента	166
5.2.7. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде других специальных функций	167
5.2.8. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде неприводимого тензорного произведения произвольного вектора \mathbf{r}	167
5.3. Интегральные представления сферических функций	167
5.3.1. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде неопределенных интегралов, пределы которых зависят от угла ϑ	167
5.3.2. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде определенных интегралов в конечных пределах	168
5.3.3. Представление $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ в виде несобственных интегралов	169
5.4. Свойства симметрии	169
5.5. Поведение $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ при преобразованиях системы координат	170
5.5.1. Поворот	170
5.5.2. Инверсия	171
5.5.3. Трансляция (параллельный перенос) начала координат	171
5.5.4. Специальные случаи преобразований координатной системы	171
5.6. Разложение в ряд по сферическим гармоникам	172
5.6.1. Общие соотношения	172
5.6.2. Разложение произведений сферических функций	173
5.7. Рекуррентные соотношения	174
5.8. Дифференциальные соотношения	176
5.8.1. Действие оператора орбитального углового момента на $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	176
5.8.2. Первая и вторая производные от $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	176
5.8.3. Векторные дифференциальные операции	177
5.9. Некоторые интегралы, содержащие сферические функции	178
5.9.1. Интегралы по полному телесному углу	178
5.9.2. Фурье-преобразования некоторых функций, содержащих $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	178
5.9.3. Интегралы по ϑ	179
5.10. Суммы, содержащие сферические функции	179
5.10.1. Суммы по m (с фиксированным l)	179
5.10.2. Суммы по l (с фиксированным $m \geq 0$)	180
5.11. Производящие функции для $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	181
5.12. Асимптотические выражения для $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	182
5.12.1. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для больших l	182
5.12.2. Поведение $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ вблизи $\vartheta = 0, \pi$ и $\pi/2$	182
5.12.3. Асимптотические выражения для фиксированных m ; $l \rightarrow \infty$, $\vartheta \rightarrow 0$ и конечном $l\vartheta$	183

5.13. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для частных значений l и m	183
5.13.1. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для $l \leq 5$	183
5.13.2. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для $ m = 0, 1, 2, 3, 4$ и для любых целых l	186
5.13.3. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для $ m = l, l-1, l-2, l-3, l-4$ и для любых целых положительных l	187
5.14. $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ для частных значений ϑ	187
5.15. Нули $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	188
5.15.1. Нули $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	188
5.15.2. Нули $\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$	189
5.16. Биполярные и триполярные сферические гармоники	190
5.16.1. Биполярные сферические гармоники	190
5.16.2. Триполярные сферические гармоники	191
5.17. Разложения функций, зависящих от двух векторов	193
5.17.1. Предварительные замечания	193
5.17.2. Теорема сложения сферических гармоник	194
5.17.3. Разложения некоторых функций, зависящих от $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$	194
5.17.4. Разложения некоторых функций, зависящих от $r = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 $	195
5.17.5. Разложения $r^n = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ^n$	196
5.17.6. Разложения сферических волн	197
5.17.7. Разложение $r^N Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$	198
Глава 6. Спиновые функции	200
6.1. Спиновые функции частиц с произвольным спином	200
6.1.1. Определение	200
6.1.2. Базисные спиновые функции	201
6.1.3. Спиральные базисные функции	202
6.1.4. Общий вид спиновых функций	204
6.1.5. Поляризационная матрица плотности	205
6.1.6. Две частицы с произвольными спинами	207
6.2. Спиновые функции частиц с $S = 1/2$	208
6.2.1. Базисные спиновые функции	208
6.2.2. Разложение произведений базисных функций	209
6.2.3. Действие операторов на базисные функции	209
6.2.4. Преобразование базисных функций при повороте системы координат	210
6.2.5. Спиральные базисные функции	211
6.2.6. Общий вид спиновых функций для $S = 1/2$	213
6.2.7. Поляризационная матрица плотности	214
6.3. Спиновые функции частиц со спином $S = 1$	215
6.3.1. Базисные спиновые функции	215
6.3.2. Разложения произведений спиновых функций	217
6.3.3. Действие спиновых операторов на базисные функции	218
6.3.4. Действие квадрупольных операторов на базисные функции	219
6.3.5. Преобразование базисных функций при повороте системы координат	220
6.3.6. Спиральные базисные функции для $S = 1$	222
6.3.7. Общий вид спиновых функций для $S = 1$	225

Глава 7. Шаровые тензоры	228
7.1. Общие свойства шаровых тензоров	228
7.1.1. Определение	228
7.1.2. Компоненты шаровых тензоров	229
7.1.3. Комплексное сопряжение	230
7.1.4. Преобразования систем координат	230
7.1.5. Дифференциальные уравнения	230
7.1.6. Действие оператора ∇ и операторов угловых моментов на шаровые тензоры	231
7.1.7. Суммы шаровых тензоров	232
7.1.8. Ортогональность, нормировка и полнота	233
7.1.9. Разложение в ряд по шаровым тензорам	233
7.2. Шаровые спиноры	233
7.2.1. Определение	233
7.2.2. Компоненты шаровых спиноров	234
7.2.3. Комплексное сопряжение; обращение времени	235
7.2.4. Преобразование системы координат	236
7.2.5. Действие оператора ∇ и операторов углового момента на шаровые спиноры	236
7.2.6. Рекуррентные соотношения	237
7.2.7. Ортогональность, нормировка и полнота; разложение в ряд по шаровым спинорам	238
7.2.8. Разложение Клебша–Гордана	238
7.2.9. Теоремы сложения	239
7.2.10. Квадратичные комбинации шаровых спиноров	239
7.3. Шаровые векторы	242
7.3.1. Определение	242
7.3.2. Компоненты шаровых векторов	243
7.3.3. Комплексное сопряжение	248
7.3.4. Преобразования систем координат	248
7.3.5. Дифференциальные уравнения	249
7.3.6. Дифференциальные операции	249
7.3.7. Действие операторов углового момента на шаровой вектор	251
7.3.8. Алгебраические соотношения	252
7.3.9. Суммы шаровых векторов	253
7.3.10. Разложения Клебша–Гордана	255
7.3.11. Теоремы сложения для шаровых векторов	256
7.3.12. Интегралы, содержащие шаровые векторы	259
7.3.13. Ортогональность, нормировка и полнота	260
7.3.14. Разложение в ряд по шаровым векторам	261
7.3.15. Шаровые векторы для $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$	263
7.3.16. Шаровые векторы при $J = 0, 1$	263
7.3.17. Квадраты модулей шаровых векторов	264
7.4. Определения шаровых тензоров другими авторами	267
Глава 8. Коэффициенты Клебша–Гордана и $3jm$ -символы	268
8.1. Определение	268
8.1.1. Коэффициенты Клебша–Гордана	268
8.1.2. $3jm$ -символы Вигнера	269
8.1.3. Редже R -символы	270

8.2. Явный вид коэффициентов Клебша–Гордана и их соотношения с другими функциями	270
8.2.1. Представления коэффициентов Клебша–Гордана в форме алгебраических сумм	271
8.2.2. Квазибиномиальное представление коэффициентов Клебша–Гордана	271
8.2.3. Коэффициенты Клебша–Гордана и конечные разности	272
8.2.4. Выражения коэффициентов Клебша–Гордана через биномиальные коэффициенты	273
8.2.5. Представление коэффициентов Клебша–Гордана через гипергеометрические функции	273
8.2.6. Представление $3jm$ -символов в виде алгебраических сумм	274
8.2.7. Квазибиномиальное представление $3jm$ -символов	275
8.3. Интегральные представления	276
8.3.1. Интегралы, содержащие алгебраические функции	276
8.3.2. Интегралы, содержащие D -функции Вигнера	276
8.3.3. Интегралы, содержащие сферические функции	276
8.3.4. Интегральные представления произведений коэффициентов Клебша–Гордана	277
8.4. Свойства симметрии	277
8.4.1. Свойства симметрии R -символов	277
8.4.2. Свойства симметрии $3jm$ -символов	277
8.4.3. Свойства симметрии коэффициентов Клебша–Гордана	278
8.4.4. «Зеркальная» симметрия	279
8.4.5. Свойства коэффициентов векторного сложения при преобразованиях системы координат и обращении времени	280
8.5. Явный вид коэффициентов Клебша–Гордана для частных значений аргументов	280
8.5.1. Частные значения моментов a, b, c	280
8.5.2. Частные значения проекций моментов	284
8.6. Рекуррентные соотношения для коэффициентов Клебша–Гордана	285
8.6.1. Общие рекуррентные соотношения	285
8.6.2. Соотношения, в которых аргументы α, β, γ меняются на 1	286
8.6.3. Соотношения, в которых аргументы α, β, γ меняются на $1/2$	286
8.6.4. Случай аргументов $\alpha = \beta = \gamma = 0$	288
8.6.5. Изменение аргументов a, b, c на 1	288
8.6.6. Изменение аргументов a, b, α, β на 1	289
8.6.7. Изменение аргументов c, b, γ, β на 1	290
8.6.8. Рекуррентные соотношения для символов Редже	290
8.7. Суммы произведений коэффициентов Клебша–Гордана	291
8.7.1. Суммы, содержащие один коэффициент Клебша–Гордана	292
8.7.2. Суммы, содержащие произведение 2 коэффициентов Клебша–Гордана	292
8.7.3. Суммы, содержащие произведения 3 коэффициентов Клебша–Гордана	292
8.7.4. Суммы, содержащие произведения 4 коэффициентов Клебша–Гордана	293
8.7.5. Суммы, содержащие произведения коэффициентов Клебша–Гордана и одного $6j$ -символа	294
8.7.6. Суммы, содержащие произведения коэффициентов Клебша–Гордана и одного $9j$ -символа	295
8.7.7. Некоторые дополнительные суммы произведений коэффициентов Клебша–Гордана	295

8.8. Производящие функции	296
8.8.1. Определитель Редже в степени J	296
8.8.2. Произведения биномов	296
8.8.3. Экспоненциальная функция	296
8.8.4. Гипергеометрическая функция	296
8.8.5. D -функция Вигнера	297
8.8.6. Производящая функция для коэффициента C_{a0b0}^{c0}	297
8.9. Классический предел и асимптотические выражения для коэффициентов Клебша–Гордана	297
8.9.1. Асимптотические выражения для случая $a, c \gg b$	297
8.9.2. Асимптотическое выражение для случая $a, b, c, \gamma \gg a + b - \gamma$	298
8.9.3. Квазиклассические формулы для случая $a, b, c \gg 1$	298
8.9.4. Квадраты коэффициентов Клебша–Гордана в классическом пределе	300
8.10. Корни коэффициентов векторного сложения	300
8.11. Связь коэффициентов Клебша–Гордана и $3jm$ -символов с аналогичными функциями других авторов	303
8.12. Алгебраические таблицы коэффициентов Клебша–Гордана	303
8.13. Таблицы численных значений коэффициентов Клебша–Гордана	303
Глава 9. Матричные элементы неприводимых тензорных операторов	327
9.1. Теорема Вигнера–Экарта и вычисление матричных элементов	327
9.1.1. Теорема Вигнера–Экарта	327
9.1.2. Правило сумм	327
9.1.3. Матричные элементы произведения неприводимых тензорных операторов	328
9.1.4. Матричные элементы операторов, зависящих от переменных двух подсистем	330
9.1.5. Матричные элементы операторов, зависящих от переменных одной из подсистем	334
9.2. Матричные элементы основных тензорных операторов	336
9.2.1. Некоторые предварительные замечания	336
9.2.2. Матричные элементы единичного оператора $\hat{\mathbf{I}}$	337
9.2.3. Матричные элементы единичного векторного оператора $\hat{\mathbf{n}}(\vartheta, \varphi) \equiv \hat{\mathbf{n}}_1(\vartheta, \varphi)$	338
9.2.4. Матричные элементы оператора $\hat{\mathbf{V}}(r, \vartheta, \varphi) \equiv \hat{\mathbf{V}}_1(r, \vartheta, \varphi)$	339
9.2.5. Матричные элементы оператора полного углового момента $\hat{\mathbf{J}} \equiv \hat{\mathbf{J}}_1$	342
9.2.6. Матричные элементы оператора орбитального углового момента $\hat{\mathbf{L}} \equiv \hat{\mathbf{L}}_1$	346
9.2.7. Матричные элементы оператора спина $\hat{\mathbf{S}} \equiv \hat{\mathbf{S}}_1$	348
9.2.8. Матричные элементы оператора сферической функции $\hat{Y}_{L\nu} \equiv Y_{L\nu}(\vartheta, \varphi)$	349
9.2.9. Матричные элементы некоторых скалярных и векторных произведений	355

II. Специальные методы теории

Глава 10. $6j$-символы и коэффициенты Рака	360
10.1. Определение	360
10.1.1. $6j$ -символы	360
10.1.2. Коэффициенты Рака	361
10.1.3. R -символы	361

10.2. Общие выражения для $6j$ -символов; связь $6j$ -символов с другими функциями . . .	363
10.2.1. Выражения для $6j$ -символов в терминах конечных сумм	363
10.2.2. Формулы Баргманна	364
10.2.3. Соотношения между $6j$ -символами и обобщенными гипергеометрическими функциями	364
10.2.4. Соотношения между $6j$ -символами и $3jm$ -символами	365
10.2.5. Квазибиномиальное представление $6j$ -символов	365
10.3. Интегральные представления $6j$ -символов	367
10.4. Симметрия $6j$ -символов и коэффициентов Рака	367
10.4.1. R -символы	367
10.4.2. $6j$ -символы	368
10.4.3. Коэффициенты Рака	368
10.4.4. «Зеркальная» симметрия	369
10.5. Явный вид $6j$ -символов для частных значений индексов.	370
10.5.1. Один из индексов равен нулю	370
10.5.2. Один из аргументов равен сумме двух других	370
10.5.3. Один из аргументов меньше на единицу суммы двух других	371
10.5.4. Аргументы a, b, d, e попарно равны	372
10.6. Рекуррентные соотношения	373
10.6.1. Соотношения, в которых аргументы меняются на $1/2$	373
10.6.2. Соотношения, в которых аргументы меняются на 1	375
10.7. Производящая функция	375
10.8. Суммы, содержащие $6j$ -символы.	376
10.9. Асимптотика $6j$ -символов при больших значениях угловых моментов	377
10.9.1. Асимптотические соотношения между $6j$ -символами и коэффициентами Клебша–Гордана	377
10.9.2. Асимптотические выражения для $6j$ -символов	377
10.10. Связь между $6j$ -символами Вигнера и аналогичными функциями других авторов	381
10.11. Таблицы алгебраических выражений для $6j$ -символов	381
10.12. Численные значения $6j$ -символов	382
Глава 11. $9j$-символы	408
11.1. Определение $9j$ -символов	408
11.1.1. $9j$ -символы как коэффициенты пересвязки	408
11.1.2. $9j$ -символ и r -символ	410
11.2. Явный вид $9j$ -символов и их связь с другими функциями	411
11.2.1. Выражения для $9j$ -символов в форме алгебраических сумм	411
11.2.2. Формулы Ву	412
11.2.3. $9j$ -символы как суммы произведений коэффициентов Клебша–Гордана или $3jm$ -символов	414
11.2.4. $9j$ -символы как суммы произведений $6j$ -символов или коэффициентов Рака	415
11.3. Интегральные представления $9j$ -символов	415
11.3.1. Представление, включающее обобщенную гипергеометрическую функцию	415
11.3.2. Представление, включающее D -функцию Вигнера	415
11.3.3. Интегралы, содержащие характеры неприводимых представлений группы вращений	416

11.4. Свойства симметрии $9j$ -символов	416
11.4.1. Перестановочная симметрия	416
11.4.2. Симметрия R -символов	418
11.4.3. «Зеркальная» симметрия	419
11.5. Рекуррентные соотношения для $9j$ -символов	420
11.5.1. Общий вид рекуррентных соотношений	420
11.5.2. Соотношения, содержащие в себе четыре $9j$ -символа	420
11.5.3. Соотношения, содержащие в себе пять $9j$ -символов	422
11.5.4. Соотношение, включающее шесть $9j$ -символов	424
11.5.5. Рекуррентные соотношения для специальных случаев	425
11.6. Производящая функция для $9j$ -символов	426
11.7. Асимптотические выражения для $9j$ -символов	427
11.8. Явный вид $9j$ -символов при некоторых соотношениях между аргументами	428
11.8.1. Две одинаковые строки (или столбца)	428
11.8.2. Одна вырожденная триада	428
11.8.3. Две вырожденные триады	429
11.8.4. Три вырожденные триады	431
11.8.5. Четыре вырожденные триады	431
11.8.6. Пять или шесть вырожденных триад	433
11.9. Явный вид $9j$ -символов для частных значений аргументов	433
11.9.1. Один или несколько равных нулю аргументов	433
11.9.2. Один из аргументов равен единице	434
11.9.3. Одна из триад равна $(1/2, 1/2, 1)$	434
11.10. Связь $9j$ -символов Вигнера с аналогичными функциями других авторов	435
11.11. Таблицы алгебраических выражений $9j$ -символов	435
11.12. Таблицы численных значений $9j$ -символов	436
Глава 12. $12j$-символы	481
12.1. Определение $12j$ -символов	481
12.1.1. Некоторые замечания, касающиеся $3nj$ -символов	481
12.1.2. $12j$ -символы первого рода ($12j(I)$ -символы)	482
12.1.3. $12j$ -символы второго рода ($12j(II)$ -символы)	487
Глава 13. Графический метод квантовой теории углового момента	494
13.1. Графическое представление функций.	494
13.1.1. Базисные элементы диаграмм	495
13.1.2. Диаграммы основных функций	496
13.2. Графическое представление основных операций теории	500
13.2.1. Умножение	501
13.2.2. Инвариантное суммирование по проекциям	501
13.2.3. Суммирование по угловым моментам	503
13.2.4. Инвариантное интегрирование по направлениям	503
13.2.5. Интегрирование по параметрам поворота	504
13.3. Правила графической техники	505
13.3.1. Деформация графиков	505
13.3.2. Изменение знака узла	506
13.3.3. Изменение направления внешних линий	508

13.3.4. Изменение направления внутренних линий	509
13.3.5. Связывание блоков	509
13.3.6. Разбиение диаграммы на отдельные блоки	510
13.3.7. Графический метод суммирования	512
13.3.8. Замещение внутренней Ω -линии жирной j -линией	513
13.3.9. Изъятие линии $j = 0$	514
13.3.10. Изъятие линии $R = 1$	514
13.4. Резюме графической техники	527
13.4.1. Основные свойства диаграмм	527
13.4.2. Обобщенная теорема Вигнера–Эккарта в диаграммном виде	528
13.4.3. Схема применения графической техники	530
Глава 14. Суммы коэффициентов векторного сложения	532
14.1. Суммирование произведений $3jm$ -символов	532
14.1.1. Суммы, включающие один $3jm$ -символ	532
14.1.2. Суммы, включающие произведение двух $3jm$ -символов	533
14.1.3. Суммы, включающие произведение трех $3jm$ -символов	533
14.1.4. Суммы, включающие произведение четырех $3jm$ -символов	534
14.1.5. Суммы, включающие произведение пяти $3jm$ -символов	535
14.1.6. Суммы, включающие произведение шести $3jm$ -символов	537
14.2. Суммирование произведений $6j$ - и $9j$ -символов	542
14.2.1. Суммы, включающие один $3nj$ -символ	542
14.2.2. Суммы, включающие произведение двух $3nj$ -символов	543
14.2.3. Суммы, включающие произведение трех $3nj$ -символов	546
14.2.4. Суммы, включающие произведение четырех $3nj$ -символов	549
Список обозначений тома 1	555
Список литературы тома 1	559