ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Множества. Упорядоченность. Мера, интегрирование** . . . 7

§ 1.1. Множества. Отношения. Упорядоченность 7
1.1.1. Множества. Отображения (7). 1.1.2. Системы множеств (11). 1.1.3. Прямое (декартово) произведение множеств. Операции и отношения. Эквивалентность (17). 1.1.4. Упорядоченность. Решетки. Булевы алгебры (20).

§ 1.2. Мера, интегрирование. Заряд, векторная мера 25
1.2.1. Мера (25). 1.2.2. Измеримые функции (32). 1.2.3. Интеграл Лебега (36). 1.2.4. Заряд. Теорема Радона–Никодима. Векторная мера (38).

§ 1.3. Замечания 42

Задачи и упражнения 43

Глава 2. **Алгебраические системы. Пространства** 46

§ 2.1. Классические алгебраические системы 46
2.1.1. Группы (46). 2.1.2. Кольца, модули, алгебры (55). 2.1.3. Прямые произведения и прямые суммы алгебраических систем (61).

§ 2.2. Топологические и метрические пространства 63
2.2.1. Топологические пространства. Гомеоморфизм (63). 2.2.2. Метрические пространства (71).

§ 2.3. Линейные пространства 76
2.3.1. Размерность, базисы (77). 2.3.2. Подпространства, линейные многообразия (78). 2.3.3. Фактор-пространства. Прямые суммы (80). 2.3.4. Линейные отображения векторных пространств (гомоморфизмы) (83). 2.3.5. Полилинейные отображения (90).

§ 2.4. Нормированные и евклидовы пространства. 91
2.4.1. Норма и скалярное произведение в линейных пространствах (91). 2.4.2. Отображения нормированных пространств. Предел, непрерывность (97). 2.4.3. Непрерывные линейные функционалы (99). 2.4.4. Линейные операторы на нормированных пространствах (105). 2.4.5. Собственные подпространства и собственные значения операторов (119).

§ 2.5. Дифференцирование отображений нормированных пространств . . . 128
2.5.1. Малость, порядок контакта функций (128). 2.5.2. Дифференцируемость. Производные (129). 2.5.3. Свойства дифференцируе-

мых функций (133). 2.5.4. Высшие производные. Классы дифференцируемых функций (139).

§ 2.6. Аффинные пространства 141
2.6.1. Аффинные пары. Присоединенное пространство. Евклидовость (141). 2.6.2. Радиусы-векторы. Линеалы. Биекция множеств точек и радиусов-векторов (142). 2.6.3. Аффинная система координат (142).

§ 2.7. Многообразия. Диффеоморфизмы 143
2.7.1. Понятие многообразия (143). 2.7.2. Тип, размерность многообразия (146). 2.7.3. Подмногообразия, склеивание. Морфизмы многообразий (147). 2.7.4. Произведения многообразий (148). 2.7.5. Чистые многообразия конечной размерности (148). 2.7.6. Примеры многообразий в арифметическом пространстве (150). 2.7.7. Группы Ли (151).

§ 2.8. Замечания 152

Задачи и упражнения 154

Глава 3. **Элементы техники работы с векторами** 158

§ 3.1. Векторы и ковекторы евклидовых пространств. Базисы 158
3.1.1. Представление линейных функционалов (158). 3.1.2. Взаимные базисы, компоненты векторов (159).

§ 3.2. Преобразование базисов. Инвариантность векторов и скаляров . . . 161
3.2.1. Формулы перехода к новому базису (161). 3.2.2. Инвариантность скаляров и векторов (162).

§ 3.3. Ориентация. Векторное и смешанное произведения 163
3.3.1. Векторное и смешанное произведения (163). 3.3.2. Альтернирующие символы. Символы Леви-Чивиты (164).

§ 3.4. Векторные процессы. Дифференцирование по параметру 165

Задачи и упражнения 166

Глава 4. **Тензоры второго ранга над евклидовым пространством** 168

§ 4.1. Определение и основные понятия 168
4.1.1. Линейные операторы и билинейные функционалы. Тензоры второго ранга (168). 4.1.2. Диады. Диадные базисы. Компоненты тензоров (169). 4.1.3. Диадная, индексная и матричная техники работы с тензорами и векторами (173). 4.1.4. Преобразование компонент при замене базисов. Инвариантность тензоров. Собственные и совместные инварианты (175).

§ 4.2. Операции с тензорами. Инварианты. Тензорные подпространства. . 176
4.2.1. Транспонирование. Симметричные и антисимметричные тензоры (176). 4.2.2. След тензора. Шаровые тензоры и девиаторы (179). 4.2.3. Свертки тензора с векторами. Однократная свертка тензоров. Степени тензора (180). 4.2.4. Определитель. Присоединенный тензор. Невырожденность, обратный тензор (181).

4.2.5. Последовательная и параллельная двукратные свертки. Евклидовость пространства $\mathcal{L}$ (184). 4.2.6. Некоторые ортогональные подпространства и базисы пространства $\mathcal{L}$ (185).

§ 4.3. Собственные подпространства и классические инварианты 188
4.3.1. Собственные векторы и собственные значения (188). 4.3.2. Теорема Кэли–Гамильтона. Выражения и оценки для скалярных инвариантов (192).

§ 4.4. Невырожденные, ортогональные и положительные тензоры. 194
4.4.1. Невырожденные тензоры (194). 4.4.2. Ортогональные тензоры (194). 4.4.3. Симметричные положительно (неотрицательно) определенные тензоры (195). 4.4.4. Теорема о полярном разложении (196).

§ 4.5. Тензорные процессы. Дифференцирование по параметру. 197

Задачи и упражнения 197

Глава 5. **Тензоры произвольных рангов** 201

§ 5.1. Тензорное произведение векторных пространств 201
5.1.1. Общее определение. Определяющие соотношения тензорного произведения (201). 5.1.2. Свойства тензорного произведения. Полиадные базисы (203). 5.1.3. Представление линейных отображений векторных пространств (205).

§ 5.2. Тензоры произвольных рангов: общие понятия 208
5.2.1. Тензоры. Типы тензоров. Некоторые интерпретации (208). 5.2.2. Тензоры-полиады. Базисы, компоненты тензоров (209). 5.2.3. Операции с тензорами различных типов (211).

§ 5.3. Тензоры над евклидовым векторным пространством. 218
5.3.1. Определение и интерпретации тензоров над евклидовым векторным пространством (218). 5.3.2. Полиадные базисы. Компоненты тензоров, опускание и поднятие индексов (220). 5.3.3. Основные операции над тензорами (224).

§ 5.4. Совместные свертки тензоров. Линейные отображения ${}^p\mathcal{L}$ в ${}^q\mathcal{L}$. . . 229
5.4.1. Последовательные и параллельные совместные свертки тензоров. Евклидовость пространств ${}^m\mathcal{L}$ (229). 5.4.2. Линейные отображения ${}^p\mathcal{L}$ в ${}^q\mathcal{L}$ (232).

§ 5.5. Некоторые тензоры-константы 233
5.5.1. Метрический тензор второго ранга и тензор Леви-Чивиты. Коаксиальность векторов и тензоров второго ранга (233). 5.5.2. Тензоры-константы четвертого ранга: единичный тензор и тензор транспонирования (235).

Глава 6. **Тензорные функции. Дифференцирование**. 239

§ 6.1. Линейные функции 239
6.1.1. Представления линейных функций (239). 6.1.2. Примеры линейных функций и их представлений (241).