

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие | 14 |
| Основные обозначения | 17 |
| | |
| Тема 1. Формализация проблем управления в экономике | 21 |
| § 1. Цели и возможности применения математики и теории оптимизации в экономике | 21 |
| § 2. Математическое описание экономических объектов | 23 |
| 2.1. Управляемые и прогнозные модели (23). 2.2. Управляемость и большая размерность (25). 2.3. Непрерывное и дискретное время (29). 2.4. Основные разделы описания: материальный, финансовый и социальный (30). 2.5. Описание внешней среды (31). 2.6. Элементы экономики и элементы описания (31). 2.7. Продукты и выпуски (33). 2.8. Основные фонды и мощность (34). 2.9. Оператор планирования и оператор функционирования (35). 2.10. Простейшая однопродуктовая схема (36). 2.11. Простейший оператор планирования (37). 2.12. Процедура объединения элементов (40). 2.13. Аппроксимация описаний (43). | |
| § 3. Схемы принятия управленческих решений | 44 |
| 3.1. Теоретико-управленческие начала (44). 3.2. Стандартная форма описания схем экономического управления (46). 3.3. Планирование и оперативное управление (48). | |
| § 4. Примеры формализации | 53 |
| 4.1. Задача о штатах фирмы (53). 4.2. Задача о кредите (55). | |
| § 5. Сводка этапов построения и эксплуатации математических моделей | 59 |
| § 6. Классификация математических задач управления | 64 |
| 6.1. Классификация по схеме управления (64). 6.2. Классификация по априорной информированности о возмущениях (64). 6.3. Классификация по динамическим свойствам задачи (65). 6.4. Классификация по мощности множества допустимых управлений (65). 6.5. Классификация по способу формализации предпочтений управлений (65). | |
| Упражнения к теме 1 | 66 |
| Список литературы к теме 1 | 70 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Тема 2. Оптимизация в детерминированном приближении | 71 |
| § 1. Формулировка оптимизационной проблемы. | 71 |
| 1.1. Детерминированное приближение как полезная абстракция (71). 1.2. Общая запись и примеры задач оптимизации (72). | |
| § 2. Определение оптимальных решений и проблема их существования | 74 |
| 2.1. Определение оптимального решения (74). 2.2. Пример (75). 2.3. Три причины отсутствия оптимальных решений (76). 2.4. О достаточности и необходимости условий существования оптимальных решений (78). 2.5. Примеры отсутствия и существования оптимальной цены продаж (80). | |
| § 3. Допустимые и оптимальные решения | 91 |
| 3.1. Постановка задачи на допустимость (92). 3.2. Оптимальное решение как предел допустимых (93). | |
| § 4. Эквивалентные и взаимные задачи оптимизации. | 96 |
| 4.1. Монотонные преобразования критерия оптимальности (96). 4.2. Взаимная замена критерия оптимальности и ограничения допустимости (98). | |
| § 5. Параметрические задачи оптимизации. | 108 |
| 5.1. Цели и формулировка задачи параметрического анализа (108). 5.2. Схема последовательной оптимизации (109). 5.3. Пример последовательной оптимизации (116). | |
| § 6. Теоретико-множественный подход к оптимизации | 125 |
| 6.1. Сведение проблемы оптимизации к поиску точной границы между пустотой и непустотой множеств (125). 6.2. Техника отыскания границы непустоты параметрически заданных множеств (126). 6.3. Пример (128). | |
| Упражнения к теме 2. | 130 |
| Приложения к теме 2. | 136 |
| П.1. Элементы математической логики (136). П.2. Множества (149). П.3. Бинарные отношения, функции (отображения) (154). | |
| Список литературы к теме 2 | 158 |
| | |
| Тема 3. Математическое программирование | 159 |
| § 1. Общие положения | 159 |
| 1.1. Основные понятия (160). 1.2. Типы задач математического программирования (163). 1.3. Графический метод решения (170). 1.4. Последовательная оптимизация как способ решения задач малой размерности (174). 1.5. Достаточные условия существования глобального экстремума (175). 1.6. Локальная оптимизация (183). | |
| § 2. Безусловная оптимизация | 187 |
| 2.1. Постановка и схема решения задачи (187). 2.2. Признаки локального экстремума (190). 2.3. Примеры решения задач (197). | |
| § 3. Классическая задача математического программирования | 203 |
| 3.1. Постановка задачи (203). 3.2. Признаки условного локального экстремума (207). 3.3. Применение метода Лагранжа для отыскания условного локального экстремума (231). 3.4. Оценка чувстви- | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| тельности экстремального значения целевой функции к изменению констант в условиях связи (242). | |
| Упражнения к теме 3 | 260 |
| Приложения к теме 3 | 264 |
| П.1. Топологические характеристики точек и множеств (264). | |
| П.2. Числовые (скалярные) функции многих переменных (269). | |
| П.3. Выпуклые множества и функции (276). П.4. Квадратичные формы (285). П.5. Квадратичные формы с линейными условиями связи (291). П.6. Вектор-функции (299). | |
| Список литературы к теме 3 | 301 |
| Тема 4. Нелинейное программирование | 302 |
| § 1. Основные понятия | 302 |
| § 2. Необходимый признак локального максимума | 307 |
| 2.1. Допустимые направления (308). 2.2. Идея вывода необходимого признака (312). 2.3. Условия Куна–Таккера в градиентной форме (318). 2.4. Необходимый признак условного локального максимума для задач с выпуклыми ограничениями (327). 2.5. Условия Куна–Таккера в алгебраической форме (335). 2.6. Условия Куна–Таккера для задач на минимум (340). | |
| § 3. Достаточные признаки максимума | 342 |
| 3.1. Достаточный признак для задач выпуклого программирования (342). 3.2. Усиленные условия Куна–Таккера (344). | |
| § 4. Обзор результатов | 349 |
| § 5. Примеры решения задач | 353 |
| § 6. Оценка чувствительности экстремального значения целевой функции к изменению констант в ограничениях задачи. | 373 |
| § 7. Седловая точка функции Лагранжа. | 383 |
| 7.1. Определение седловой точки (383). 7.2. Теорема Куна–Таккера о седловой точке функции Лагранжа (387). 7.3. Двойственные задачи нелинейного программирования. Экономическая интерпретация (397). | |
| § 8. Численные методы решения задач нелинейного программирования | 398 |
| 8.1. Градиентные методы (399). 8.2. Метод штрафных функций (401). | |
| Упражнения к теме 4 | 404 |
| Приложения к теме 4 | 418 |
| П.1. Теорема о разделяющей гиперплоскости (418). П.2. Теорема Фаркаша (419). | |
| Список литературы к теме 4 | 420 |
| Тема 5. Линейное программирование | 422 |
| § 1. Формы представления задач линейного программирования | 422 |
| § 2. Структура допустимого множества и типы решений. | 425 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1. Структура допустимого множества (425). 2.2. Типы решений (426). | |
| § 3. Прямая и двойственная задачи линейного программирования | 428 |
| 3.1. Понятие двойственной задачи (428). 3.2. Теоремы двойственности (429). 3.3. Экономическая интерпретация двойственных задач (433). | |
| § 4. Графический метод решения задач линейного программирования . . | 436 |
| 4.1. Задачи с двумя переменными (436). 4.2. Задачи с двумя ограничениями (439). 4.3. Вырожденные случаи (444). | |
| § 5. Анализ чувствительности оптимального решения к параметрам задачи линейного программирования. | 446 |
| 5.1. Особенности проявления чувствительности в задачах линейного программирования (446). 5.2. Пример анализа чувствительности (448). 5.3. Оценка диапазона постоянства параметра чувствительности (453). 5.4. Теорема чувствительности (454). | |
| § 6. Принцип гарантированного результата в задачах линейного программирования | 460 |
| § 7. Решение задач линейного программирования симплекс-методом. . . | 464 |
| 7.1. Идея симплекс-метода (464). 7.2. Понятие симплекса (466). 7.3. Пример решения задачи симплекс-методом (470). | |
| § 8. Транспортные задачи линейного программирования | 478 |
| 8.1. Понятие транспортной задачи (479). 8.2. Определение начального плана (482). 8.3. Нахождение оптимального плана (485). | |
| § 9. Компьютерная реализация решения задач линейного программирования. | 489 |
| 9.1. Загрузка программы Microsoft Excel 2000 (490). 9.2. Запись исходных данных задачи (490). 9.3. Запись формул (492). 9.4. Запуск программы поиска решения (494). 9.5. Ввод исходных данных задачи в программу поиска решения (494). 9.6. Запуск процедуры решения задачи (498). 9.7. Анализ результатов (498). | |
| Упражнения к теме 5. | 503 |
| Список литературы к теме 5 | 511 |
| Тема 6. Дискретная оптимизация. | 512 |
| § 1. Типы задач целочисленного программирования | 512 |
| 1.1. Понятие задачи целочисленного программирования (512). 1.2. Экономические примеры, формализуемые как задачи целочисленного программирования (516). 1.3. Классификация задач целочисленного программирования (525). | |
| § 2. Решение задач линейного целочисленного программирования методом отсечения | 527 |
| 2.1. Идея метода (527). 2.2. Алгоритм Гомори (528). 2.3. Пример решения задачи методом отсечения (531). | |
| § 3. Решение задач целочисленного программирования методом ветвей и границ | 539 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. Идея метода (539). 3.2. Схема решения задач целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ (542). 3.3. Пример решения задачи методом ветвей и границ (545). | |
| § 4. Сетевое планирование. | 547 |
| 4.1. Построение сетевого графика (548). 4.2. Расчет минимальной продолжительности разработки проекта (552). | |
| Упражнения к теме 6. | 553 |
| Список литературы к теме 6. | 555 |
| Предметный указатель к тому 1. | 556 |
| Предметный указатель к тому 2. | 561 |

Содержание второго тома

Токарев В. В.

Многокритериальность. Динамика. Неопределенность

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Основные обозначения | 14 |
| Тема 7. Многокритериальная оптимизация | 18 |
| § 1. Многокритериальность и недоминируемые, или эффективные, решения | 18 |
| 1.1. Допустимые решения и критерии (19). 1.2. Недоминируемые, или эффективные, решения (21). 1.3. Пример — распределение бюджета между двумя статьями расходов (25). 1.4. Пример — покупка автомобиля (25). 1.5. Игровая трактовка, сравнение с равновесием по Нэшу (27). 1.6. Трансформация эффективностей при расширении набора критериев (30). 1.7. Экспертно оцениваемые критерии и их шкалы (33). | |
| § 2. Выделение эффективных решений посредством однокритериальной оптимизации | 36 |
| 2.1. Метод критериальных ограничений (36). 2.2. Метод линейной свертки критериев (39). 2.3. Эффективные решения в линейных задачах (41). | |
| § 3. Целевое программирование | 44 |
| 3.1. Идея целевого программирования (44). 3.2. Метод идеальной точки (46). 3.3. Общая задача линейного целевого программирования (50). 3.4. Пример линейного целевого программирования (52). | |
| § 4. Интерактивные методы многокритериального выбора | 58 |
| 4.1. Визуализация паретовских множеств (58). 4.2. Сравнительная важность критериев (62). 4.3. Уступки по критериям (67). | |
| § 5. Бескритериальная формализация предпочтений. | 69 |
| 5.1. Бинарные отношения (69). 5.2. Использование бинарных отношений в задачах выбора (73). 5.3. Функция полезности (76). | |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.4. О представимости бинарных отношений векторным критерием (79). 5.5. О функциях выбора (79). | |
| Упражнения к теме 7 | 80 |
| Приложение к теме 7 | 92 |
| Список литературы к теме 7 | 96 |
| | |
| Тема 8. Оптимизация в динамических системах — принцип максимума | 98 |
| § 1. Формулировка динамических задач оптимизации | 99 |
| 1.1. Специфика динамических управляемых систем (99). 1.2. Дифференциальные системы, или системы в непрерывном времени (100). 1.3. Конечно-разностные системы, или системы в дискретном времени (106). 1.4. О существовании оптимальных решений в динамических задачах (108). | |
| § 2. Принцип максимума Понтрягина | 112 |
| 2.1. Каноническая задача оптимального управления (112). 2.2. Идея принципа максимума (113). 2.3. Исключение дифференциальных связей из канонической задачи (115). 2.4. Седловая точка лагранжиана — достаточное условие оптимальности (117). 2.5. Гамильтониан, его максимум и уравнения для множителей Лагранжа (118). 2.6. Вариационный смысл множителей Лагранжа (123). 2.7. Принцип максимума и классическое вариационное исчисление (123). | |
| § 3. Теорема Понтрягина и ее использование | 125 |
| 3.1. Формулировка теоремы (125). 3.2. Использование теоремы (127). 3.3. Еще один пример использования принципа максимума — решение задачи с закрепленными концами траектории (139). | |
| § 4. Условия трансверсальности для задач с незакрепленными концами траектории | 161 |
| 4.1. Общая схема получения условий трансверсальности (161). 4.2. Примеры (166). 4.3. Условия трансверсальности и принцип максимума для функционала Больца (167). 4.4. Задачи с нефиксированным отрезком времени (169). | |
| § 5. Распространение принципа максимума на нестандартные задачи управления | 175 |
| 5.1. Смешанные ограничения на управление и фазовые координаты (175). 5.2. Постоянные управляющие параметры (177). 5.3. Требования к функциональному виду управления (179). 5.4. Ограниченное время действия управления (181). 5.5. Запаздывания в фазовых координатах (183). 5.6. Запаздывания в управлении (187). 5.7. Задачи в дискретном времени (189). | |
| § 6. Достаточные условия Кротова | 192 |
| 6.1. Вводные замечания (192). 6.2. Обобщенная формулировка задачи оптимального управления (193). 6.3. Идея достаточных условий и лемма о неухудшающем расширении (194). 6.4. Конструкция расширенного функционала и теорема о достаточности (195). | |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.5. Построение производящей функции с использованием процедуры Понтрягина (198). | |
| 6.6. Построение производящей функции с использованием уравнения Беллмана (202). | |
| 6.7. Метод кратных максимумов (203). | |
| 6.8. Игровая идея численных методов построения производящей функции (207). | |
| Упражнения к теме 8. | 208 |
| Список литературы к теме 8. | 215 |
| Тема 9. Динамическое программирование. | 217 |
| § 1. Уравнение Беллмана для конечно-разностных систем. | 217 |
| 1.1. Принцип оптимальности (217). | |
| 1.2. Рекурсивная процедура для канонической задачи в дискретном времени (218). | |
| 1.3. Распространение процедуры на критерий Больца и пример (224). | |
| § 2. Обобщение беллмановской процедуры на задачи с фазовыми и смешанными ограничениями | 229 |
| 2.1. О происхождении фазовых и смешанных ограничений (229). | |
| 2.2. Новые черты беллмановской процедуры на примере (230). | |
| 2.3. Общая схема (236). | |
| 2.4. Решение статических задач распределения ресурсов методом динамического программирования (239). | |
| § 3. Уравнение Беллмана в непрерывном времени | 243 |
| 3.1. Вывод уравнения Беллмана для канонической задачи (243). | |
| 3.2. Решение примера в непрерывном времени (248). | |
| 3.3. Уравнение Беллмана и принцип максимума Понтрягина (250). | |
| Упражнения к теме 9. | 253 |
| Список литературы к теме 9. | 257 |
| Тема 10. Гарантирующее, или игровое, управление | 258 |
| § 1. Формализация проблемы управления в условиях неопределенности | 258 |
| 1.1. Основные понятия (259). | |
| 1.2. Принцип гарантированного результата (260). | |
| 1.3. Пример формализации и решения задачи о штатах фирмы по принципу гарантированного результата (262). | |
| § 2. Методы построения оптимальных гарантирующих планов. | 268 |
| 2.1. Сведение к задаче математического программирования (268). | |
| 2.2. Пример решения задачи линейного программирования с неопределенностями (270). | |
| 2.3. Сведение к макс-мину без ограничений методом Лагранжа (274). | |
| § 3. Сравнение с идеальным управлением | 275 |
| 3.1. Максимизирующая стратегия (275). | |
| 3.2. Сопоставление по условиям разрешимости (276). | |
| 3.3. Сравнение по критерию качества (277). | |
| 3.4. Игровая интерпретация (279). | |
| 3.5. Пример и достаточное условие наличия седловой точки — задача уклонения от налогов (282). | |
| 3.6. Пример и новые причины отсутствия седловой точки (285). | |
| § 4. Другие способы выбора управлений в условиях неопределенности | 288 |
| 4.1. Принцип близости к идеальному решению (288). | |
| 4.2. Принцип оптимизма–пессимизма (291). | |
| 4.3. Принцип наиболее вероят- | |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| ного возмущения (291). 4.4. Принцип равновероятных возмущений (292). | |
| § 5. Гарантирующее планирование для динамических систем в непрерывном времени. | 293 |
| 5.1. Конкретизация общей схемы на примере задачи управления запасами (293). 5.2. Сведение к задаче оптимального управления без возмущений (295). 5.3. Решение результирующей задачи (299). 5.4. Обобщающие замечания (303). 5.5. Численное построение допустимых гарантирующих планов (305). | |
| § 6. Гарантирующее пошаговое управление для динамических систем в дискретном времени. | 308 |
| 6.1. Общая схема (308). 6.2. Пример — управление мелкооптовой базой (311). | |
| Упражнения к теме 10 | 315 |
| Список литературы к теме 10 | 331 |
| | |
| Тема 11. Вероятностное планирование | 333 |
| § 1. Общие положения вероятностного планирования. | 333 |
| 1.1. Априорная информация о возмущениях (334). 1.2. Схема управления (334). 1.3. Оптимизация в среднем (стохастическая) (334). 1.4. Вероятностно-гарантирующий подход к планированию (336). 1.5. Вероятностно-гарантирующие решения дискретных задач с конечным множеством возмущений и планов (338). | |
| § 2. Универсальная формулировка задачи о вероятностно-гарантирующем планировании. | 340 |
| 2.1. Подмножества благоприятных возмущений (340). 2.2. Доказательство эквивалентности (341). 2.3. Жесткие и нежесткие ограничения на управление (342). | |
| § 3. Предельная тождественность вероятностно-гарантирующего и гарантирующего планирования | 347 |
| 3.1. Возможный диапазон наилучших вероятностно-гарантирующих оценок (348). 3.2. Достаточные условия предельной тождественности (349). 3.3. Примеры отсутствия предельной тождественности (354). 3.4. Характер сходимости вероятностного решения к гарантирующему (359). | |
| § 4. Рандомизация выбора управления — смешанные стратегии. | 364 |
| 4.1. Условия применимости смешанных стратегий (365). 4.2. Чистые и смешанные стратегии для матричных антагонистических игр (367). 4.3. Пример — матричная игра об инспекции сокрытия доходов и ее смешанное расширение (370). 4.4. Существование седловой точки в смешанных стратегиях для матричных игр (377). | |
| § 5. Вероятностно-гарантирующее планирование в конечношаговой задаче управления запасами. | 380 |
| 5.1. Модификация (380). 5.2. Формулировка задачи вероятностно-гарантирующего планирования (381). 5.3. Общие свойства (384). | |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.4. Динамический пример (385). 5.5. Сравнение с идеальным и гарантирующим решениями (390). | |
| Упражнения к теме 11 | 393 |
| Список литературы к теме 11 | 401 |
| Заключение | 402 |
| Предметный указатель к тому 1 | 409 |
| Предметный указатель к тому 2 | 414 |