

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	8
Авторское предисловие к первому изданию (1991 г.)	10
Авторское предисловие ко второму изданию — почти двадцать лет спустя	11
Глава 1. Информация и интерполяция	13
§ 1.1. Поверхностное описание	14
§ 1.2. Зачем нужно столько чисел?	17
§ 1.3. Информация, которая приходит сверху	23
§ 1.4. Активные измерения.	27
§ 1.5. Синоптик помогает компьютеру	32
§ 1.6. Всякое действие рождает ошибки. Проблема контроля	33
§ 1.7. Интерполяционный многочлен	38
§ 1.8. Наилучшее чебышёвское приближение	46
1.8.1. Альтернанс и многочлены Чебышёва (46). 1.8.2. Многочлены Бернштейна и сходимость с производными (49).	
§ 1.9. Интерполяция сплайнами и прогонка.	51
§ 1.10. Интерполяция, оптимальная в смысле теории вероятностей.	55
1.10.1. Вероятность, математическое ожидание и климат (55). 1.10.2. Дисперсия и корреляция (56). 1.10.3. Группа вращений и изотропность случайного по- ля (58). 1.10.4. Интерполяция, оптимальная для данного поля (59). 1.10.5. Дан- ные с шумом (61). 1.10.6. Квадратурные формулы и оценка среднего для слу- чайного поля (64).	
§ 1.11. Решение линейных алгебраических уравнений	69
§ 1.12. Методы извлечения квадратного корня. Эволюция метода от Вавилонского цар- ства до наших дней.	71
§ 1.13. Корректность, устойчивость, непрерывность и т. п.	79
§ 1.14. Ветер на полюсе и локальные координаты	95
Глава 2. Уравнения, описывающие эволюцию атмосферы	98
§ 2.1. Законы движения материальной точки и сплошной среды.	99
§ 2.2. Закон сохранения вещества и уравнение неразрывности	101
§ 2.3. Закон изменения импульса и уравнения движения.	108
§ 2.4. Выполняется ли закон Архимеда? Это зависит от масштаба.	118
§ 2.5. Дискретизация уравнения гидростатики для целей контроля	123
§ 2.6. Закон сохранения энергии и уравнение притока тепла	128
§ 2.7. Условие потенциальности, дифференциальные формы и сферы с n ручками	140
2.7.1. Достаточное условие потенциальности и односвязность области (140). 2.7.2. Циклы, лингвистика и статистика (142). 2.7.3. Бездивергентность и со- леноидальность (143). 2.7.4. Многочлены от антикоммутирующих перемен-	

ных (143). 2.7.5. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование (145). 2.7.6. Когомологии де Рама и род поверхности (147). 2.7.7. Топология: триангуляция и эйлерова характеристика (151). 2.7.8. Замена координат и теорема Стокса–Пуанкаре (152). 2.7.9. Оператор Лапласа, риманова метрика и форма Лере–Гельфанда (157).	
§ 2.8. Уравнения мелкой воды и солитоны.	161
2.8.1. Цунами. Волна, для которой океан — мелкая вода (161). 2.8.2. Первые интегралы эволюционной системы (163). 2.8.3. Солитоны в канале (164).	
§ 2.9. Стационарные решения и вихри: в атмосфере и в трубах	171
2.9.1. Стационарные и периодические по времени решения (171). 2.9.2. Стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости (172). 2.9.3. Стационарность решения в подвижной системе координат (175). 2.9.4. Двумерные модели, функция тока и конформные преобразования (180). 2.9.5. Точечные вихри (186). 2.9.6. Бездивергентность и соленоидальность (188). 2.9.7. Течения с осевой симметрией (189). 2.9.8. Расплывание точечного вихря из-за вязкости — автомодельное решение (192). 2.9.9. Геострофические соотношения (194). 2.9.10. Климат — поля средних. Устойчивы ли они? (197). 2.9.11. Ламинарные и турбулентные течения (198). 2.9.12. Трубопроводы и гидроудар (209).	
§ 2.10. Устойчивость по Ляпунову для дифференциальных и конечно-разностных уравнений	218
2.10.1. Метрики и нормы на фазовом пространстве (218). 2.10.2. Устойчивость по Ляпунову стационарной точки (220). 2.10.3. Экспонента матрицы системы (223). 2.10.4. Неоднородные уравнения и матрица Вронского (224). 2.10.5. Спектр и устойчивость (225). 2.10.6. Нелинейная устойчивость и линеаризация (228). 2.10.7. Конечно-разностные уравнения и системы (230).	
§ 2.11. Устойчивость по Ляпунову и энергетический метод	237
2.11.1. Функция Ляпунова, лемма Морса и первые интегралы (237). 2.11.2. Индекс векторного поля и теорема Пуанкаре–Хопфа (239). 2.11.3. Замечательные вариационные задачи (242). 2.11.4. Первые интегралы и вариационный подход (247). 2.11.5. Устойчивость и реализуемость в природе (254). 2.11.6. Устойчивость подпространств (256). 2.11.7. Принцип Гамильтона и его модификации (258).	
§ 2.12. Пределы предсказуемости	261
§ 2.13. Вариационно-статистические подходы к усвоению информации	272
Глава 3. Как решать прогностические уравнения	278
§ 3.1. Дискретизация задачи.	279
§ 3.2. Первая попытка	284
§ 3.3. Примеры разностных и спектральных схем.	292
3.3.1. Аппроксимация разделенными разностями (292). 3.3.2. Простейшие схемы для эволюционного уравнения и разрешающий оператор (293). 3.3.3. Разностные схемы и аппроксимация Паде (296). 3.3.4. Ряды Фурье и разностные схемы (297). 3.3.5. Аппроксимация нелинейного уравнения переноса (302). 3.3.6. Ряды Фурье–Тейлора и разностная аппроксимация в окрестности полюса (304).	
§ 3.4. Аппроксимация, устойчивость, сходимость	307
§ 3.5. Граничные условия	313
§ 3.6. Атмосферные фронты и аппроксимация разрывных решений	321
3.6.1. Что считать атмосферным фронтом? (321). 3.6.2. Разностная аппроксимация разрывных решений (321). 3.6.3. Инварианты Римана (324). 3.6.4. Типы разрывных решений системы уравнений газовой динамики и градиентная катастрофа (327). 3.6.5. Какое слабое решение является истинным? (329). 3.6.6. На-	

клон атмосферного фронта (331). 3.6.7. Диагностика геометрии атмосферного фронта по данным измерений (332).	
§ 3.7. Заключение к первой части	336
Глава 4. Более сложные задачи и усовершенствованные методы	344
§ 4.1. Характеристики	346
§ 4.2. Обобщенные функции или распределения	349
§ 4.3. Ряд Фурье и интегральные преобразования	354
4.3.1. Метод Фурье и явление Уилбрахама–Гиббса (354). 4.3.2. Ряд Фурье и оценка коэффициентов неявных схем (360). 4.3.3. Преобразование Фурье и интегральные нормы (363). 4.3.4. Поточечное обращение преобразования Фурье (365). 4.3.5. Примеры преобразования Фурье (367). 4.3.6. Функции Вебера–Эрмита — собственные функции преобразования Фурье (368). 4.3.7. Линейные замены переменных и преобразование Фурье (370). 4.3.8. Квантовая механика и принцип неопределенности Гейзенберга (371). 4.3.9. Пространства Соболева и лемма о вложении (372). 4.3.10. Фундаментальное решение уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами и преобразование Фурье обобщенных функций (373). 4.3.11. Классификация уравнений в частных производных: эллиптические, гиперболические, параболические... (378). 4.3.12. Преобразование Фурье для задачи Коши и интеграл ошибок (381). 4.3.13. Синус-и косинус-преобразования Фурье (383). 4.3.14. Многомерное преобразование Фурье и функции Бесселя (385). 4.3.15. Собственные функции оператора Лапласа (390).	
§ 4.4. Вариационное исчисление: уравнение Эйлера и условия трансверсальности	394
4.4.1. Вариационное согласование и уравнение Эйлера для простейших функционалов (394). 4.4.2. Граничные условия в вариационных задачах (397). 4.4.3. Вариационные задачи для функций нескольких переменных (401). 4.4.4. Лагранжианы и их симметрии (403). 4.4.5. Возможны ли негладкие экстремали? (404). 4.4.6. Принцип наименьшего действия для распределенных систем (408). 4.4.7. Вторая вариация интегрального функционала и условия Лежандра (412). 4.4.8. Уравнение Якоби и сопряженные точки (415). 4.4.9. Сколько может быть различных минимумов? Задача Плато (418).	
§ 4.5. Условный экстремум и оптимальные траектории	422
4.5.1. Знаменитые задачи на условный экстремум (422). 4.5.2. Множители Лагранжа (423). 4.5.3. Быстрые и медленные маятники. Пассивное и активное неравенства (427). 4.5.4. Вариационное согласование метеорологических полей при условии баланса (431). 4.5.5. Оптимизация магнитного поля (432). 4.5.6. Принцип максимума Понтрягина и оптимальный путь (433).	
§ 4.6. Операционное исчисление	440
4.6.1. Преобразование Лапласа и гамма-функция (440). 4.6.2. Обратное преобразование и полюсы изображений (443). 4.6.3. Теоремы разложения (445). 4.6.4. Дифференциальные уравнения и свертка (448). 4.6.5. Интегральные представления функций Бесселя и гамма-функции (451).	
§ 4.7. Асимптотические методы	454
4.7.1. Асимптота и асимптотика (454). 4.7.2. Лемма Эрдейи и метод стационарной фазы (455). 4.7.3. Лемма Морса, многогранник Ньютона и метод стационарной фазы в многомерном случае (463). 4.7.4. Интегралы Лапласа (468). 4.7.5. Гамма-функция, функция ошибок, формула Стирлинга и другие примеры асимптотик (470). 4.7.6. Метод перевала (475).	
§ 4.8. Теория возмущений матриц и операторов	481
4.8.1. Возмущение собственных чисел и векторов (481). 4.8.2. Амбиполярная диффузия (484). 4.8.3. Корень из матрицы (485). 4.8.4. Возмущения дифференциальных уравнений (488).	

§ 4.9. Положительная определенность и теория возмущений. Как оценивать корреляционные функции?	491
§ 4.10. Изотропны ли метеорологические поля?	504
§ 4.11. Спектры: внутри, снаружи и оптимизация	509
4.11.1. Задача Штурма–Лиувилля и асимптотика ее собственных чисел. Метод Фурье (509). 4.11.2. Краевая задача для уравнения порядка n и метод прогонки (518). 4.11.3. Матрица Вронского и функция Грина (522). 4.11.4. Граничные условия, имитирующие задачу на прямой (523). 4.11.5. Асимптотика собственных функций регулярной задачи Штурма–Лиувилля. К чему приводит сингулярность (524). 4.11.6. Пример нелинейной зависимости задачи от спектрального параметра (525). 4.11.7. Оптимизация первого собственного числа задачи по форме потенциальной ямы (527).	
§ 4.12. Гипергеометрическая функция и периодические колебания в атмосфере Земли	533
4.12.1. Характерные временные масштабы динамики атмосферы (533). 4.12.2. Сведение системы линеаризованных уравнений динамики атмосферы к обыкновенному дифференциальному уравнению, зависящему от параметров (540). 4.12.3. Разделение переменных (545). 4.12.4. Исключительные значения спектрального параметра λ (546). 4.12.5. Граничные условия для функции ψ (548). 4.12.6. Свободные колебания гидростатической системы (558). 4.12.7. Возможные уточнения модели (565). 4.12.8. Многочлены гипергеометрического типа и формула Родрига (566).	
§ 4.13. Информация со спутника и уравнения Фредгольма	569
4.13.1. Интегральные уравнения типа свертки и учет шумов (569). 4.13.2. Уравнения Фредгольма второго рода (574). 4.13.3. Теорема Мерсера и эмпирические ортогональные функции (575).	
§ 4.14. Краевая задача для конечно-разностных уравнений: аппроксимация, блуждания, игры	580
4.14.1. Примеры конечно-разностных уравнений (580). 4.14.2. Случайные блуждания и вероятность выигрыша (581). 4.14.3. Резонансы и время окончания игры (583).	
§ 4.15. Сюрпризы граничных условий	586
4.15.1. Корректность задачи Коши и пример Адамара (586). 4.15.2. Какими должны быть граничные условия — теория Шапиро–Лопатинского (589). 4.15.3. Смешанные краевые задачи с особенностями на границе (595). 4.15.4. Граничные условия стыковки процессов в двух средах (596). 4.15.5. Сращивание асимптотик и рациональные функции (602). 4.15.6. Граничные условия на подвижной границе (605). 4.15.7. Задача Стефана (606). 4.15.8. Условия стыковки для гиперболических систем (608). 4.15.9. Граничные условия, имитирующие задачу Коши (609). 4.15.10. Граничные условия, имитирующие задачу Коши, для классических уравнений математической физики. Функции Макдональда (611). 4.15.11. Граничные условия, имитирующие задачу Коши, для уравнений с переменными коэффициентами (623). 4.15.12. Граничные условия на верхней границе атмосферы (624).	
§ 4.16. Граничные условия для разностных уравнений и аппроксимация Паде	626
4.16.1. Полное поглощение на границе для уравнений переноса и волнового. Схемы <i>leap-frog</i> и Кранка–Николсона. Многочлены Лежандра: производящая функция, интеграл Шлефли и асимптотики (626). 4.16.2. Аппроксимация Паде и двухслойные схемы интегрирования (631). 4.16.3. Граничное условие имитации теплообмена с почвой (633). 4.16.4. Аппроксимация Паде и компактные схемы (635). 4.16.5. Аппроксимация Паде–Эрмита и многослойные схемы интегрирования (635). 4.16.6. Рациональные функции и схемы интегрирования уравнения второго порядка (640). 4.16.7. Полуэявные схемы (644). 4.16.8. Компактные схемы для неоднородных уравнений. Схема Милна и ее обобщения (645). 4.16.9. Разностная аппроксимация псевдодифференциального оператора (647).	

4.16.10. Разностная аппроксимация, оптимальная в статистическом смысле (650).	
4.16.11. Полное поглощение на верхней границе атмосферы. Схемы Кранка–Николсона и <i>leap-frog</i> (651).	
4.16.12. Первый шаг для многослойной схемы (654).	
§ 4.17. Компактная схема 4-го порядка на сфере \mathbb{S}^2 для вычисления скорости по вихрю и дивергенции	661
4.17.1. Постановка задачи динамики метеорологических полей (661).	
4.17.2. Компактные схемы (663).	
4.17.3. Граничные условия для компактной схемы и решение «в большом» (667).	
4.17.4. Компактная схема для аппроксимации оператора 4-го порядка (672).	
4.17.5. Порядок аппроксимации компактной схемой дифференциального уравнения с особенностью (675).	
4.17.6. Общая задача (677).	
4.17.7. Особая точка на границе отрезка (680).	
4.17.8. Граничные условия в точках полюсов для гладких скалярных функций и компонент векторного поля (683).	
4.17.9. Преобразование Фурье и дифференциальные соотношения для различных мод (684).	
4.17.10. Нулевая мода (684).	
4.17.11. Ненулевые моды (685).	
4.17.12. Проекторы на подпространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (689).	
4.17.13. Оценка погрешности на точных решениях (690).	
4.17.14. Вычисление ротора и дивергенции (693).	
§ 4.18. Устойчивые и неустойчивые течения жидкости	694
4.18.1. Уравнение Рэлея и его модификации (694).	
4.18.2. Течение Куэтта; теоремы Рэлея и Фьортофта–Хойланда (697).	
4.18.3. Оценка инкремента, локализация собственных чисел и теорема Майлса–Ховарда (700).	
4.18.4. Какие профили самые неустойчивые (700).	
4.18.5. Переход к безразмерным переменным (702).	
4.18.6. Система дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа в вещественном виде и граничные условия (702).	
4.18.7. Уравнения в вариациях для численного определения неизвестных параметров (703).	
4.18.8. Метод стрельбы для определения неизвестных параметров системы (705).	
4.18.9. Результаты и обсуждение: асимптотики и целочисленные соотношения (708).	
4.18.10. Минимизация функционала (710).	
4.18.11. Возможные обобщения метода (711).	
§ 4.19. Указания к нескольким трудным контрольным вопросам	713
Список литературы	716
Предметный указатель	725