

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Математическое введение . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1. Динамическая устойчивость решений гамильтоновых систем типа уединенных волн . . . . .	14
1.1.1. Трансляционная инвариантные гамильтоновы системы (14).	
1.1.2. Существование решений и основные предположения (15).	
1.1.3. Устойчивость (16).	
1.2. Спектральная неустойчивость и функция Эванса . . . . .	19
1.2.1. Локальный анализ (20). 1.2.2. Внешние системы (27).	
1.2.3. Функция Эванса (27). 1.2.4. Большие $ \lambda $ (28).	
<b>Глава 2. Петлеобразные солитоны в эластике Эйлера . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1. Формулировка задачи, солитонные решения, симметрии . . . . .	34
2.1.1. Солитонные решения (35). 2.1.2. Корректность задачи Коши (36).	
2.1.3. Симметрии (36).	
2.2. Спектральные свойства оператора $\mathcal{H}$ . . . . .	37
2.2.1. Возмущения в плоскости петли (37). 2.2.2. Поперечные возмущения (38).	
2.3. Устойчивость . . . . .	40
2.3.1. Возмущения в плоскости петли. Орбита $T(\omega)\phi_c$ (40).	
2.3.2. Орбита $G(\varphi)T(\omega)\phi_c$ (41).	
2.4. Вычисление первого ненулевого коэффициента ряда Тейлора функции $D(\lambda)$ . . . . .	42
2.5. Резюме . . . . .	45
2.6. Приложение . . . . .	47
<b>Глава 3. Захваченные моды в сжимаемом стержне . . . . .</b>	<b>50</b>
3.1. Продольные волны . . . . .	51
3.1.1. Формулировка задачи (51). 3.1.2. Солитонные решения (53).	
3.1.3. Устойчивость (56).	
3.2. Продольно-изгибные волны . . . . .	57
3.2.1. Формулировка задачи и основные уравнения (57). 3.2.2. Существование и устойчивость захваченных изгибных мод (58).	
3.3. Нелинейный резонанс продольной и изгибной мод . . . . .	61
3.4. Обсуждение и выводы . . . . .	61
3.5. Приложение . . . . .	63
<b>Глава 4. Неустойчивость «шейки» в растянутом стержне . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1. Формулировка задачи, солитонные решения . . . . .	66
4.1.1. Вывод уравнения (4.0.1) (66). 4.1.2. Локальная теория существования (67).	
4.1.3. Солитонные решения уравнения (4.0.1) (67). 4.1.4. Симметрии (68).	
4.2. Условия орбитальной устойчивости . . . . .	68

4.2.1. Спектр оператора $\mathcal{H}$ (68).	4.2.2. Ограничение на скорость уединенной волны (69).	
4.3. Неустойчивость . . . . .		70
4.4. Резюме . . . . .		74
Глава 5. <b>Солитонные структуры в композиционном материале</b> . . . . .		76
5.1. Формулировка задачи . . . . .		77
5.1.1. Основные уравнения (77).	5.1.2. Локальная теория существования (78).	
5.1.3. Сохраняющиеся величины и симметрии (79).	5.1.4. Солитонные решения (80).	
5.2. Условия орбитальной устойчивости . . . . .		81
5.2.1. Спектральные свойства оператора $\mathcal{H}$ (81).	5.2.2. Свойства билинейной формы $\langle \mathcal{H}u, u \rangle$ (85).	
5.3. Модельные уравнения: наводящие соображения . . . . .		87
5.4. Неустойчивость . . . . .		89
5.5. Взаимодействие уединенных волн . . . . .		90
5.6. Обсуждение результатов . . . . .		97
5.7. Приложение . . . . .		98
Глава 6. <b>Некоторые нерешенные задачи</b> . . . . .		104
6.1. Уединенные волны при изгибе бесконечного нерастяжимого стержня с кручением . . . . .		104
6.1.1. Независимые и зависимые переменные задачи (106).	6.1.2. Углы Эйлера в динамике стержней (110).	
6.1.3. Бегущие волны и солитоноподобные структуры (113).		
6.2. Плоские уединенные волны изгиба с учетом малых деформаций . . . . .		117
6.2.1. Динамические уравнения плоских движений стержней (119).	6.2.2. Законы сохранения и вариационные принципы (122).	
6.2.3. Общая теория бегущих волн (124).	6.2.4. Уединенные волны (129).	
6.3. Уединенные волны в упругих трубах, заполненных жидкостью . . . . .		131
6.3.1. Формулировка основных уравнений (133).	6.3.2. Линейный анализ (135).	
6.3.3. Уединенный волны (136).	6.3.4. Грубость солитонных решений (139).	
6.4. Обсуждение . . . . .		141
Список литературы . . . . .		153

## Предисловие

Изучение волн деформации и изгиба в упругих стержнях привлекает в последнее время значительный интерес, прежде всего в силу того обстоятельства, что стержень является естественным линейным волноводом. Даже в линейном случае упругие волноводы обнаруживают ряд замечательных свойств. К этим свойствам относится, в первую очередь, существование так называемых захваченных мод — локализованных собственных решений рассматриваемых уравнений, имеющих конечную энергию. Соответствующие решения отвечают изолированным значениям частоты и являются сильно локализованными в пространстве, иными словами, представляют собой собственные функции спектральных задач, где в роли спектрального параметра выступает частота волны (см., например, [Postnova & Craster, 2007]).

Учет нелинейных эффектов теории упругости приводит к появлению локализованных волн, которые возникают, как продукт баланса нелинейности и дисперсии. Нелинейность в упругом стержне обусловлена конечными значениями напряжений, упругими свойствами материала, а также конечной величиной поперечных отклонений, в то время как дисперсия возникает в результате конечных поперечных размеров стержня, а также в результате вертикальных смещений упругой линии.

Надлежащим образом упрощенные уравнения нелинейной теории упругости, описывающие волны в одномерных волноводах, во многих случаях позволяют аналитически описать локализованные волновые структуры. К этим структурам относятся, прежде всего, продольные волны деформаций постоянной формы — уединенные волны.

Уединенные волны — локализованные по пространству решения нелинейных уравнений, описывающих волновые процессы в диспергирующих и диссипативных средах, привлекают значительный интерес в качестве объектов как математического, так и физического исследований. Присутствие решений типа уединенных волн — солитонов — у сложных нелинейных уравнений стимулировало развитие разнообразных методов мощного математического формализма, в том числе знаменитого метода обратной задачи теории рассеяния (см., например, [Захаров и др., 1980; Dodd *et al.*, 1982]). Солитоны представляют собой пример уединенных волн, взаимодействие которых происходит без изменения формы.

Однако принятое в литературе понятие уединенной волны относится к более общему классу бегущих волн, основной характеристикой