

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка	11
§ 1. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши	11
§ 2. Продолжение решений. Непродолжимые решения, явления взрыва и прекращения решения	14
§ 3. Линейное однородное дифференциальное уравнение, его фундаментальное решение и общее решение	16
§ 4. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение и нахождение его общего решения методом Лагранжа	19
§ 5. Линейное ДУ с постоянным коэффициентом и со специальной правой частью	23
§ 6. Дифференциальные уравнения, линейные относительно независимой переменной	25
§ 7. Уравнение Бернулли	29
§ 8. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными	33
§ 9. Примеры нарушения единственности решения задачи Коши. Особые решения	35
§ 10. Дифференциальные уравнения и неявные функции	37
§ 11. Уравнения в дифференциалах и функции, заданные параметрически	40
Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков	43
§ 1. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков	43
§ 2. Линейная независимость решений и определитель Вронского	45
§ 3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения	47
§ 4. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	49
§ 5. Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами	51
§ 6. Основные свойства решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений	55
§ 7. Линейное ДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью	60
§ 8. Понятие о краевых (граничных) задачах	62
§ 9. Общая краевая задача для линейного ДУ и ее функция Грина	65
§ 10. Периодические решения неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами	68
§ 11. Методы понижения порядка дифференциального уравнения	69

Глава III. Системы дифференциальных уравнений первого порядка	74
§ 1. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений	74
§ 2. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений	77
§ 3. Системы дифференциальных уравнений с постоянной диагонализуемой матрицей	78
§ 4. Системы дифференциальных уравнений с постоянной комплексно диагонализуемой матрицей	81
§ 5. Построение базиса из собственных и присоединенных векторов матрицы	84
§ 6. Построение фундаментальной системы решений для системы ДУ с постоянной матрицей	88
§ 7. Фундаментальная матрица и ее свойства	91
§ 8. Системы неоднородных линейных ДУ. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных	94
§ 9. Пример задачи о периодических решениях системы дифференциальных уравнений	96
Глава IV. Динамические системы и элементы теории устойчивости по Ляпунову	99
§ 1. Динамическая система ДУ, фазовое пространство, траектории	99
§ 2. Первый интеграл динамической системы	102
§ 3. Устойчивость положений равновесия	106
§ 4. Теорема об устойчивости по линейному приближению	109
§ 5. Положения равновесия двумерной линейной системы. Основные положения равновесия и их фазовые портреты	112
§ 6. Движение материальной точки на прямой. Консервативные и диссипативные системы	118
§ 7. Метод функций Ляпунова	121
§ 8. Положения равновесия консервативных динамических систем	124
§ 9. Доказательства теорем Ляпунова	127
§ 10. Теорема Четаева о неустойчивости	128
§ 11. Исследование устойчивости колебаний нелинейного математического маятника при наличии трения	129
§ 12. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений	131
Глава V. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений	135
§ 1. Качественное исследование решений дифференциальных уравнений и метод изоклин	136
§ 2. Метод последовательных приближений	138
§ 3. Отыскание решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов	140
§ 4. Метод малого параметра	143
§ 5. Метод малого параметра в задаче с сингулярным возмущением	144
§ 6. Разностные схемы	147
§ 7. Метод пристрелки для решения краевых задач	152
§ 8. Метод прогонки и разностный метод в решении краевых задач	154

Глава VI. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений	158
§ 1. Банаховы пространства	158
§ 2. Принцип сжимающих отображений	162
§ 3. Некоторые свойства отображений конечномерных пространств	163
§ 4. Доказательство теоремы Коши	165
§ 5. Продолжение локального решения задачи Коши до ее глобального решения	167
§ 6. Существование и единственность решения задачи Коши в линейном случае	168
§ 7. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных значений и от параметров	169
§ 8. Степенные ряды в банаховых пространствах и теорема о неявном операторе в аналитическом случае	171
§ 9. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по линейному приближению	175
Глава VII. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка	178
§ 1. Линейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными	178
§ 2. Общее решение линейного дифференциального уравнения	181
§ 3. Квазилинейные дифференциальные уравнения и их характеристики	184
§ 4. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными	186
§ 5. Дифференциальные уравнения с несколькими независимыми переменными	189
Дополнение I. Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений	191
§ 1. Закон всемирного тяготения, первый закон Кеплера и вторая космическая скорость	194
§ 2. Резонанс, резонирующая частота в радиотехнике, биения и почти периодические решения	198
§ 3. Периодические решения в экологии и в химической кинетике	203
§ 4. Примеры бифуркационных явлений	206
§ 5. Метод фазовой плоскости в исследовании периодических и солитонных решений	215
§ 6. Метод малого параметра Линшtedта–Пуанкаре для консервативных задач	222
§ 7. Свободные колебания нелинейного математического маятника в отсутствие трения и при наличии трения	226
§ 8. Эллиптические функции Якоби и дифференциальные уравнения	231
§ 9. Метод Линшtedта–Пуанкаре отыскания предельных циклов. Орбитальная устойчивость	235
§ 10. Релаксационные колебания	240
§ 11. Теоремы Пуанкаре–Андрoнова и Пуанкаре–Бендиксона	242

§ 12. Устойчивые предельные циклы в химической кинетике и в биологии	245
§ 13. Элементарная модель теплового взрыва	247
§ 14. Операторы сдвига по траекториям ДС. Аттракторы, абстрактные ДС	251
§ 15. Корректные и некорректные математические модели и задачи. Структурная устойчивость	254
Дополнение II. Приложения MATHCAD к задачам для обыкновенных ДУ (В. И. Ракитин, В. А. Треногин)	
§ 1. Окно и инструменты MATHCAD	260
§ 2. Простейшие вычисления. Операторы присваивания	262
§ 3. Построение графиков функций	263
§ 4. Использование блока решений обыкновенных ДУ и систем ДУ	265
§ 5. Примеры решения задач Коши для нелинейных ДУ	266
§ 6. Решение нелинейной задачи Коши с малым параметром при производной	268
§ 7. Пример решения краевой задачи	269
§ 8. Пример задачи с периодическим биением	270
§ 9. Одно из периодических решений задачи «хищник–жертва»	271
§ 10. Пример задачи с релаксационным колебанием	272
§ 11. Численное моделирование задачи о тепловом взрыве	274
Дополнение III. Решение задач для обыкновенных ДУ с использованием системы компьютерной алгебры Mathematica (Н. И. Земцова, В. А. Треногин)	
§ 1. Структура системы Mathematica	277
§ 2. Простейшие численные и символьные вычисления в системе Mathematica	279
2.1. Численные расчеты (279). 2.2. Символьные вычисления (280).	
§ 3. Запись дифференциальных уравнений в системе Mathematica и их решение на примере простейших задач	280
3.1. Решение дифференциальных уравнений в символьном виде (280). 3.2. Решение дифференциальных уравнений в численном виде (281).	
§ 4. Метод изоклин	289
§ 5. Нахождение решения в виде степенного ряда	290
§ 6. Метод малого параметра	291
§ 7. Уравнение Эйри	292
§ 8. Задача о релаксационных колебаниях	293
§ 9. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы	295
§ 10. Нахождение положений равновесия ДС	296
§ 11. Система Лотки–Вольтерры с насыщением	297
§ 12. Брюсселятор	300
§ 13. Странный аттрактор Лоренца	303
Предметный указатель	306
Список литературы	308

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (далее кратко ДУ) являются одним из традиционных и ведущих разделов высшей математики. Они находят важнейшие применения в самых разнообразных областях современной науки и техники. Кроме приложений в механике, физике, технике и астрономии, все большее место ДУ занимают в химии, биологии, экологии, метеорологии, медицине, экономике и социологии. В прекрасном обзоре [10] читатель найдет много полезной информации о современном состоянии теории ДУ и ее приложений. Имеется огромное количество научных публикаций, монографий, учебников и учебных пособий по ДУ.

Данная книга направлена на чисто учебные цели, в основном — на обучение студентов высших учебных заведений. В ней нашли отражение многолетний опыт автора по преподаванию математики в Московском физико-техническом институте и в Московском институте стали и сплавов, а также его участие во множестве российских и международных научных и методических конференций.

Нашей целью является обновление традиционного и основательно устаревшего курса ДУ. Выскажем сначала ряд критических замечаний (см. [15]). Самым пагубным образом на качество преподавания математики в вузах влияют снижение из года в год уровня школьной математической подготовки, волонтаристское сокращение учебных часов на преподавание математики, засорение преподавательского состава лицами, не имеющими математического образования.

В отличие от вузовского курса математического анализа, получившего в последние десятилетия достаточно аккуратное и строгое описание в учебниках Л. Д. Кудрявцева, С. М. Никольского, В. А. Ильина и некоторых других авторов, ДУ довольно часто излагаются в учебных пособиях и преподаются в технических вузах достаточно небрежно. Распространилась тенденция учить рецептам, а не исследованию, учить действовать по шаблону, а не изучать основные понятия, факты и методы теории ДУ, на которых основаны последующие использования ДУ в преподавании математизированных дисциплин и, что особенно важно, — приложения ДУ. Наша критика относится, главным образом, к базовым начальным разделам курса ДУ, когда неаккуратно вводятся основные понятия, а так называемые простейшие методы отыскания решений ДУ обильно насыщены математическими небрежностями. Прекрасная книга выдающегося советского математика академика Л. С. Понтрягина написана на очень высоком научном уровне и, возможно, поэтому практически не оказала заметного влияния на преподавание ДУ в вузах, причем не только технических.